

Pflichtvorlesung

Grundlagen der Elektrotechnik I

(EG I)

für Studenten
des
1. Semesters

Fachhochschule
Oldenburg/Ostfriesland/**Wilhelmshaven**

Standort Wilhelmshaven

Fachbereich Elektrotechnik

Prof. Dr.-Ing. H. Ahlers

Literaturhinweise:

Auf dem Gebiet "Grundlagen der Elektrotechnik" gibt es eine Menge brauchbarer Lehrbücher, hier sei nur eines erwähnt:

- /1/ Moeller; Fricke; Frohne; Vaske:
 Grundlagen der Elektrotechnik;
 Teubner Verlag, Stuttgart 1986.

Übersicht: Grundlagen der Elektrotechnik I bis III

- 1. Semester (6 Stunden)
 - 1. Einführung
 - 2. Der einfache Gleichstromkreis
 - 3. Berechnung linearer Gleichstromnetze
 - 4. Energie und Leistung bei Gleichstrom
 - 5. Sonderabschnitte
 - 6. Wechselstrom, Einführung

- 2. Semester (6 Stunden)
 - 6. Wechselstrom, Fortsetzung
 - 7. Elektrisches Strömungsfeld
 - 8. Elektrostatistisches Feld

- 3. Semester (4 Stunden)
 - 9. Magnetisches Feld
 - 10. Schaltvorgänge

Gliederung: Grundlagen der Elektrotechnik I

1. Einführung

- 1.1. Schreibweise physikalischer und technischer Gleichungen
- 1.2. Numerisches Rechnen, Rechnen mit Näherungswerten
- 1.3. Das Internationale Maßsystem: SI-System
- 1.4. Schreibweise und Konventionen

2. Der einfache Gleichstromkreis

- 2.1. Definitionen und Grundbegriffe
- 2.2. Ohmsches Gesetz
- 2.3. Kirchhoffsche Regeln
- 2.4. Ersatzwiderstände
- 2.5. Strom- und Spannungsteiler
- 2.6. Strom- Spannungs- und Widerstandsmessungen
- 2.7. Ersatz-Quellen

3. Berechnung linearer Gleichstrom-Netze

- 3.1. Einleitung
- 3.2. Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze
- 3.3. Maschenstrom-Verfahren
- 3.4. Netz-Umwandlung
 - 3.4.1. Ersatzwiderstand
 - 3.4.2. Quellenumwandlung
 - 3.4.3. Stern-Dreieck- und Dreieck-Stern-Umwandlung
 - 3.4.4. Verlegung idealer Strom-Quellen
 - 3.4.5. Umwandlung idealer Quellen
- 3.5. Überlagerungssatz
- 3.6. Ersatzquelle
- 3.7. Knotenpunkt-Potential-Verfahren
- 3.8. Symmetrie-Überlegungen
- 3.9. Zusammenfassung der Verfahren für lineare Netzwerke

4. Energie und Leistung

- 4.1. Spannung, Potential, Feldstärke, Kraft
- 4.2. Bestimmungsgleichung der elektrischen Energie
- 4.3. Energiearten
- 4.4. Energiewandler
- 4.5. Elektrische Leistung
- 4.6. Elektrisches Erwärmen
- 4.7. Mechanische Leistung und Energie
- 4.8. Energieübertragung über Gleichstromleitungen

5. Sonderabschnitte

- 5.1. Leiter, Halbleiter, Isolatoren
- 5.2. Nichtlineare Gleichstromkreise
- 5.3. Thermoelektrische Erscheinungen
- 5.4. Elektrochemische Vorgänge

Anhang

- Aufgaben
- Ergebnisse

Inhaltsverzeichnis: Grundlagen der Elektrotechnik I

1. Einführung	1
1.1. Schreibweise physikalischer und technischer Gleichungen	1
1.2. Numerisches Rechnen, Rechnen mit Näherungswerten	1
1.3. Das Internationale Maßsystem: SI-System	2
1.3.1 Die SI-Grundeinheiten	2
1.3.2. Vielfache der Grundeinheiten	3
1.3.3. Abgeleitete Einheiten	3
1.3.4. Das Rechnen mit Einheiten	12
1.4. Schreibweise und Konventionen	14
2. Der einfache Gleichstromkreis	15
2.1. Definitionen und Grundbegriffe	15
2.1.1. Atommodelle und Molekülmodelle	15
2.1.2. Was ist Strom	16
2.1.3. Was ist Spannung	17
2.1.4. Stromleitung im Elektrolyten	18
2.1.5. Stromleitung in Metallen	19
2.1.6. Ladung	19
2.1.7. Zusammenhang Ladung und Strom	20
2.1.8. Stromdichte	20
2.1.9. Ladungsträger-Geschwindigkeit in einem Leiter	20
2.1.10. Minimal-Stromkreis	21
2.1.11. Wirkung des elektrischen Stromes	22
2.2. Ohmsches Gesetz	24
2.2.1. Formabhängigkeit des Widerstandes	25
2.2.2. Temperaturabhängigkeit von Widerständen	27
2.2.3. Material-Werte	28
2.3. Kirchhoffsche Regeln	30
2.3.1. Erstes Kirchhoffsche Gesetz	30
2.3.2. Zweites Kirchhoffsche Gesetz	31
2.4. Ersatzwiderstände	34
2.4.1. Ersatzreihenwiderstand	34
2.4.2. Ersatzparallelwiderstand	35
2.4.3. Berechnung von Netzen mit einer Spannungsquelle mit Hilfe des Ersatzwiderstandes	36
2.5. Strom- und Spannungsteiler	40
2.5.1. Spannungsteiler	40
2.5.2. Stromteiler	42
2.5.3. Potentiometer als Spannungsteiler	44
2.5.3.1. Unbelastetes Potentiometer	44
2.5.3.2. Belastetes Potentiometer	44
2.6. Strom- Spannungs- und Widerstandsmessungen	46
2.6.1. Strom-Messung	46
2.6.1.1. Prinzip und ESB	46
2.6.1.2. Meßbereichserweiterung	47
2.6.2. Spannungs-Messung	47
2.6.2.1. Prinzip und ESB	47
2.6.2.2. Meßbereichserweiterung	48
2.6.3. Widerstands-Messung	48
2.6.3.1. Ohmsches Gesetz	48
2.6.3.2. Direkt anzeigende Widerstands-Meßgeräte	49
2.6.3.3. Widerstands-Meßbrücke	50
2.6.3.3.1. Prinzip	50
2.6.3.3.2. Messung mit dekadischen Normal-Widerständen	51
2.6.3.3.3. Messung mit Potentiometer	51
2.7. Ersatz-Quellen	52
2.7.1. Ersatz-Spannungs-Quelle	52
2.7.1.1. Ersatzschaltbild	52

2.7.1.2. Kennlinie der Quelle	52
2.7.1.3. Grafische U-Bestimmung	54
2.7.2. Ersatz-Strom-Quelle	56
2.7.2.1. ESB	56
2.7.2.2. Kennlinie	56
2.7.2.3. Belastete Strom-Quelle	57
2.7.3. Umrechnung zwischen Ersatz- Strom- und Spannungs-Quelle	57
2.7.4. Geregelter Netzteil	58
3. Berechnung linearer Gleichstrom-Netze	59
3.1. Einleitung	59
3.1.1. Allgemeines	59
3.1.2. Begriffe	59
3.1.3. Normierung	60
3.2. Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze	63
3.2.1. Methode	63
3.2.2. Berechnung des Beispiel-Netzwerkes	65
3.2.3. Zusammenfassung	70
3.2.4. Beispiele zu Knoten und Maschenanalyse	71
3.3. Maschenstrom-Verfahren	74
3.3.1. Einführung von Maschenströmen	74
3.3.2. Schema zum Maschenstrom-Verfahren	77
3.3.3. Beispiele zum Maschenstromverfahren	78
3.3.4. Maschenstrom-Verfahren für Rechner	81
3.4. Netz-Umwandlung	89
3.4.1. Ersatzwiderstand	89
3.4.2. Quellenumwandlung	90
3.4.2.1. Umwandlung Strom- und Spannungs-Quellen	90
3.4.2.2. Reihenschaltung idealer Spannungs-Quellen	90
3.4.2.3. Parallelschaltung idealer Strom-Quellen	90
3.4.2.4. Beispiele zur Umwandlung Strom- und Spannungs-Quellen	91
3.4.3. Stern-Dreieck- und Dreieck-Stern-Umwandlung	95
3.4.3.1. Vorbetrachtung	95
3.4.3.2. Dreieck-Stern-Umwandlung	95
3.4.3.3. Stern-Dreieck-Umwandlung	100
3.4.4. Verlegung idealer Strom-Quellen	102
3.4.5. Umwandlung idealer Quellen	103
3.4.5.1. Umwandlung idealer Spannungs-Quellen	103
3.4.5.2. Umwandlung idealer Strom-Quellen	103
3.5. Überlagerungssatz	105
3.6. Ersatzquelle	108
3.6.1. Theorie	108
3.6.2. Schema zu Ersatz-Spannungs-Quelle	110
3.6.3. Beispiele	111
3.7. Knotenpunkt-Potential-Verfahren	113
3.7.1. Einführung von Knotenpunkt-Potentialen	113
3.7.2. Ableitung des Knotenpunkt- Potential-Verfahrens am Beispiel Netzwerk 3J	114
3.7.3. Schema zum manuellen Knotenpunkt-Potential-Verfahren	116
3.7.4. Knotenpunkt-Potential-Verfahrens für Rechner	119
3.7.5. Schema zum Knotenpunkt-Potential-Verfahren für Rechner	123
3.8. Symmetrie-Überlegungen	126
3.9. Zusammenfassung der Verfahren für lineare Netzwerke	127
4. Energie und Leistung	128
4.1. Spannung, Potential, Feldstärke, Kraft	128
4.1.1. Spannung in SI-Einheiten	128
4.1.2. Potential und Feldstärke	129
4.2. Bestimmungsgleichung der elektrischen Energie	130
4.3. Energiearten	131
4.3.1. Energie und Arbeit	131
4.3.2. Potentielle mechanische Energie	131

4.3.3. Kinetische Energie	132
4.3.4. Druckenergie	133
4.3.4.1. Druckenergie eines geschlossenen Systems	133
4.3.4.2. Arbeit im Druckfeld bei Volumenstrom	133
4.3.5. Thermische Energie	134
4.3.6. Schmelzwärme und Verdampfungsenergie	134
4.3.7. Mechanische Reibungsverluste	135
4.3.8. Magnetische Energie	135
4.3.9. Energie des elektrischen Feldes	135
4.3.10. Elektromagnetische Energie	136
4.3.11. Bindungsenergie	136
4.3.11.1. Chemische Energie	137
4.3.11.2. Kernenergie	137
4.3.11.2.1. Kernfusion	138
4.3.11.2.2. Kernspaltung	138
4.4. Energiewandler	138
4.4.1. Wandlung in elektrische Energie	138
4.4.1.1. Generatoren	138
4.4.1.2. Akkumulator, Batterie	138
4.4.1.3. Thermoelemente	138
4.4.1.4. Fotoelement, Fotozelle, Solarzelle	138
4.4.2. Wandlung der elektrischen Energie	138
4.4.2.1. Motore	138
4.4.2.2. Elektrowärme	139
4.4.2.3. Elektrochemie	139
4.4.2.4. Beleuchtung	139
4.4.3. Turbine	139
4.4.4. Kraftwerke	140
4.5. Elektrische Leistung	140
4.5.1. Leistung an einem ohmschen Widerstand	140
4.5.2. Leistungsbilanz und Wirkungsgrad	141
4.5.3. Leistungsanpassung	142
4.6. Elektrisches Erwärmen	145
4.7. Mechanische Leistung und Energie	146
4.8. Energieübertragung über Gleichstromleitungen	147
5. Sonderabschnitte	149
5.1. Leiter, Halbleiter, Isolatoren	149
5.1.1. Bereiche des spezifischen Widerstandes	149
5.1.2. Bändermodell	150
5.1.3. Die elektrische Leitfähigkeit	152
5.1.4. Halbleitung	153
5.1.4.1. Eigenleitung	153
5.1.4.2. Störstellenleitung	157
5.1.4.2.1. n-Leitung	157
5.1.4.2.2. p-Leitung	158
5.1.4.2.3. Raumladung	159
5.1.5. Der p-n-Übergang	159
5.1.6. Opto-Elektronik	166
5.1.7. VDR-Widerstände	167
5.2. Nichtlineare Gleichstromkreise	168
5.2.1. Grafische Methode	168
5.2.2. Grafische Reihenschaltung	170
5.2.3. Grafische Parallelschaltung	171
5.2.4. Polynom-Annäherung	172
5.2.5. Linearisierung im Arbeitspunkt	173
5.2.6. Lineare Ersatzschaltung	175
5.3. Thermoelektrische Erscheinungen	177
5.3.1. Temperaturabhängigkeit des Widerstandes	177
5.3.1.1. Metalle und Halbleiter	177
5.3.1.2. NTC und PTC Widerstände	180

5.3.1.3. Temperaturkompensation	182
5.3.2. Übergang zwischen zwei Materialien	183
5.3.2.1. Seebeck-Effekt, Thermoelement	183
5.3.2.2. Peltier-Effekt	185
5.4. Elektrochemische Vorgänge	186
5.4.1. Elektrolyt	186
5.4.2. Elektrolyse und Stromleitung	187
5.4.3. Elektrochemische Spannungserzeugung	189
5.4.3.1. Galvanische Elemente	194
5.4.3.2. Akkumulator	195
Anhang	198
Aufgaben	198
Ergebnisse	216

1. Einführung

1.1. Schreibweise physikalischer und technischer Gleichungen

Physikalische Größe = Zahlenwert * Einheit

Beispiel: $15.55 \text{ cm} = 15.55 * 1 \text{ cm}$

In der praktischen Anwendung gibt es drei Arten von Gleichungen:

Größengleichung: $U = R * I$
 $F = m * a$

Einheitsgleichung: $N = \text{kg m/s}^2$

zugeschnitten Größengleichung: $\frac{U}{kV} = \frac{I}{kA} * \frac{R}{\Omega}$

Beispiele:

Größengleichung: $F = 10 \text{ kg} * 5 \text{ m/s}^2 = 50 \text{ kg ms}^{-2}$
 $U = 5 \Omega * 7 \text{ A} = 35 \text{ V}$

Einheitsgleichung: $1 \text{ V} = 1 \text{ A} * 1 \Omega$
 $1 \text{ W} = 1 \text{ V} * 1 \text{ A}$
 $1 \text{ N} = 1 \text{ kgms}^{-2}$

1.2. Numerisches Rechnen, Rechnen mit Näherungswerten

Die Aussage

$$\sqrt{3} = 1.732$$

ist mathematisch falsch, praktisch aber richtig.

Vereinbarung:

In der Vorlesung **Grundlagen der Elektrotechnik** soll i.a. mit **drei** Stellen Genauigkeit gerechnet werden, dazu müssen i. a. Zwischenwerte mit **vier** Stellen Genauigkeit berechnet werden.

1.3. Das Internationale Maßsystem: SI-System

Was ist Messen?

Antwort: Vergleichen

Um zu vergleichen, werden Vergleichsmaße benötigt. Das internationale Maßsystem, das SI-System (System-International), hat sieben Grundeinheiten festgelegt (siehe Kap. 1.3.1). Alle anderen physikalischen Größen lassen sich aus den sieben Grundeinheiten ableiten, siehe Kap. 1.3.3. Um handliche Zahlen zu bekommen sind sehr oft dekadische Vielfache der Basiseinheiten zu verwenden, siehe Kap. 1.3.2.

1.3.1 Die SI-Grundeinheiten

Länge:

Historie :	<p>Elle (Armlänge)</p> <p>Fuß (Name sagt es)</p> <p>Zoll (1150 legte der König von Schottland fest: mittlere Daumendicke von 3 Männern)</p> <p>Obere Größen (und auch noch viele nicht erwähnte Größen) sind alles vage individuelle Größen.</p>
1799	Meter : 40 000 000 Teil des ungenau gemessenen Erdumfangs (auch noch vage)
Heute :	1 m ist die 1 650 763.73 fache Länge der Wellenlänge des isolierten Atoms des Isotops Krypton 86 vom Übergang vom Zustand $5d_5$ zum Zustand $2p_{10}$

Zeit:

Früher:	Auch die Dauer einer Erdumdrehung ist eine vage Größe. Zur Zeit der Dinosaurier betrug die Dauer einer Erdumdrehung etwa 22.5 Stunden.
Heute:	1 s repräsentiert 9 192 931 770 Schwingungen des Atoms Cäsium ^{133}C

Masse: 1 kg als Archivkilogramm

Stromstärke:

Früher:	Die Stromstärke 1 A wurde früher über die ausgeschiedene Menge Metall in einem elektrolytischen Bad definiert.
Heute:	Die Definition eines 1 A erfolgt später in Kap. 9 (magnetisches Feld, 3. Semester) mit Hilfe der Kräfte, die auf einen stromdurchflossenen Leiter wirken.

Temperatur: 1 K

Lichtstärke: 1 cd

Stoffmenge: 1 mol

1.3.2. Vielfache der Grundeinheiten

Beispiele: $1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 10^3 \text{ m}$
 $1 \text{ mm} = 0.001 \text{ m} = 10^{-3} \text{ m}$

			üblich in der E-Technik
Exa	E	10^{18}	nein
Peta	P	10^{15}	nein
Tera	T	10^{12}	nein
Giga	G	10^9	ja
Mega	M	10^6	ja
Kilo	k	10^3	ja
Hekto	h	10^2	nein
Deka	da	10^1	nein
Dezi	d	10^{-1}	nein
Zenti	c	10^{-2}	(manchmal)
Milli	m	10^{-3}	ja
Mikro	μ	10^{-6}	ja
Nano	n	10^{-9}	ja
Pico	p	10^{-12}	ja
Femto	f	10^{-15}	nein
Atto	a	10^{-18}	nein

Tabelle 1.1: Dekadische Vielfache

1.3.3. Abgeleitete Einheiten

Die in Abschnitt 1.3.1 vorgestellten SI-Basiseinheiten reichen aus, um alle anderen physikalischen Einheiten anzugeben. Dieses soll am Beispiel der Kraft exemplarisch aufgezeigt werden. Aus der physikalischen Gleichung

$$F = m \cdot a$$

wird die Einheitengleichung gebildet:

$$[F] = [m] \cdot [a] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{kgms}^{-2}$$

Somit ist die Einheit der Kraft auf SI-Basiseinheiten zurückgeführt. Damit nun nicht immer wegen des Aufwandes für die Kraft die Einheit kgms^{-2} angegeben werden muß, erfolgt die Definition der abgeleiteten Einheit:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kgms}^{-2} \quad (\text{Newton})$$

Somit kann als Einheit der Kraft angegeben werden:

$$[F] = 1 \text{ N} = 1 \text{ kgms}^{-2}$$

In der Elektrotechnik wird überwiegend mit den Einheiten m (Meter), s (Sekunde), A (Ampere) und V (Volt) gerechnet. Anstatt der SI-Basis-Einheit kg (Kilogramm) wird üblicherweise die abgeleitete Einheit Volt verwendet. Die Ableitung der Einheit Volt wird im Kapitel 4 ausführlich beschrieben. Hier nur die Kurzfassung: Aus dem Gleichsetzen der Einheiten für die elektrische und mechanische Leistung

$$1 \text{ VA} = 1 \text{ W} = 1 \text{ Nms}^{-1} = 1 \text{ kgm}^2\text{s}^{-3}$$

folgt:

$$1 \text{ kg} = 1 \text{ VAm}^{-2}\text{s}^3 \quad 1 \text{ V} = 1 \text{ kgm}^2\text{s}^{-3}\text{A}^{-1}$$

Die im Laufe der EG-Vorlesungen (EGI-EGIII) abgeleiteten Einheiten (und einige zusätzliche) sind in den Tabellen 1.2 und 1.3 eingearbeitet.

In Tabelle 1.2 sind angegeben für die meisten verwendeten Formelzeichen

- Formelbuchstabe (alphabetisch geordnet)
- Beschreibung der physikalischen Größe
- SI-Einheit in m, s, kg, A, K, cd und mol
- die abgeleitete SI-Einheit
- die Einheit in m, s, V, A und K
- das erste Auftreten oder Ableitung der Einheit im Rahmen der EG-Vorlesungen

In Tabelle 1.3 sind die Einheiten alphabetisch, geordnet, angegeben sind:

- Einheit, alphabetisch geordnet
- physikalischen Größe
- Name und Beschreibung der Einheit
- Art der Einheit (s.u.)
- die Umrechnung auf bekannte Einheiten

Bei der Art der Einheit ist zu unterscheiden:

- Sieben **SI-Basis-Einheiten** sind in Abschnitt 1.3.1 beschrieben.
- Aus den sieben SI-Basis-Einheiten abgeleitete Einheiten (z.B. oder V) sind mit "**SI-abgl.**" bezeichnet.
- Aus SI-Einheiten zusammengesetzte Einheiten sind mit "**SI-Zusatz**" gekennzeichnet (z.B. Nm, VA).
- Winkel, Raumwinkel und Umdrehungen haben die Einheit "1" zum besseren Verständnis wird manchmal z.B. rad mit angegeben, diese sind mit "**SI-sond.**" gekennzeichnet.
- Die mit "**Zusatz**" angegebene Einheiten sind zwar keine SI-Einheiten, werden jedoch noch in speziellen Bereichen benutzt oder sind leichter zu überschauen. Unter $31 \cdot 10^6$ s kann man sich weniger vorstellen als unter einem Jahr. Die Umrechnung dieser Einheiten auf SI-Einheit ist jeweils angegeben.
- Die Umrechnungen für im "**Ausland**" noch gebräuchliche Einheiten und für früher benutzte ("**alt**") Einheiten sind in Tabelle 1.3 ebenfalls angegeben.
- Auch die dekadischen Vorsätze sind in Tabelle 1.3 enthalten und mit "**Vielf**" gekennzeichnet.

	physikalische Größe	SI-Einheit	abgeleitete SI-Einheit	m-s-V-A Einheit	ab Kap.
a	Beschleunigung	ms^{-2}			
<u>a</u>	Drehfaktor	1			6.9
A	Querschnitt	m^2			
A_T	Atomgewicht	$u = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{kg}$			4.3, 5.4
b	Beweglichkeit	$\text{s}^2 \text{Akg}^{-1}$		$\text{m}^2 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1}$	5.1
b	Luftspalterweiterungsfaktor	1			9.15
B	Suszeptanz, Blindleitwert	$\text{A}^2 \text{s}^3 \text{m}^{-2} \text{kg}^{-1}$	S	AV^{-1}	6.5
B	Induktion, magn. Flußdichte	$\text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1}$	$T = \text{Vs/m}^2$	Vsm^{-2}	9.1
B_v	Leuchtdichte	cdm^{-2}			
c	elektrochemisches Äquivalent	$\text{kgA}^{-1} \text{s}^{-1}$		$\text{Vs}^2 \text{m}^{-2}$	5.4
c	spezifische Wärme	$\text{m}^2 \text{K}^{-1} \text{s}^{-2}$	$\text{W s kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	$\text{m}^2 \text{K}^{-1} \text{s}^{-2}$	4.3
c	Lichtgeschwindigkeit	m/s			4.3
C	Kapazität	$\text{A}^2 \text{s}^4 \text{m}^{-2} \text{kg}^{-1}$	$\text{As/V} = \text{F}$	AsV^{-1}	6.5, 8.7
d	Klirrfaktor	1			6.4
d, D	Durchmesser	m			
D	Verschiebungsflußdichte	Asm^{-2}	Cm^{-2}	Asm^{-2}	8.5
E	elektrische Feldstärke	$\text{kgms}^{-3} \text{A}^{-1}$	Vm^{-1}	Vm^{-1}	4.1
E_v	Beleuchtungsstärke	$\text{cd} \cdot \text{sr/m}^2$	$\text{lm/m}^2 = \text{Lx}$		
F	Frequenz- Übertragungsfunktion	1			6.7
F	Formfaktor	1			6.4
F	Kraft	kgms^{-2}	N	VAsm^{-1}	1.3
g	Erdbeschleunigung	m s^{-2}			4.3
g	differentieller Leitwert	$\text{A}^2 \text{s}^3 \text{m}^{-2} \text{kg}^{-1}$	S	AV^{-1}	5.2
g	Grundschwingungsgehalt	1			6.4
G	Wirkleitwert, Konduktanz	$\text{A}^2 \text{s}^3 \text{m}^{-2} \text{kg}^{-1}$	S	AV^{-1}	2.2
h	Eindringtiefe	m			9.10
h	Höhe	m			
H	magnetische Feldstärke	Am^{-1}			9.1
I	Strom	A			2.1
I_v	Lichtstärke	cd			
J	Stromdichte	Am^{-2}			2.1
k	Anzahl der Knoten	1			3
k	Boltzmann-Konstante	$\text{kgm}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$	WsK^{-1}	VAsK^{-1}	5.1
l	Länge	m			
L	Induktivität	$\text{kgm}^2 \text{s}^{-2} \text{A}^{-2}$	$\Omega \text{s} = \text{H}$	VsA^{-1}	6.5, 9.10
m	Anzahl der Maschen	1			3

	physikalische Größe	SI-Einheit	abgeleitete SI-Einheit	m-s-V-A Einheit	ab Kap.
m	Masse	kg		$\text{VAs}^3\text{m}^{-2}$	1.1
\dot{m}	Massenstrom	kg s^{-1}		$\text{VAs}^2\text{m}^{-2}$	/
M	Gegeninduktion	$\text{kg m}^2\text{s}^{-2}\text{A}^{-2}$	$\Omega_s = H$	VsA^{-1}	9.10
n	Elektronendichte	m^{-3}	$\text{cm}^{-3}, \text{mm}^{-3}$		2.1
n	Meßbereichserweiterungsfaktor	1			2.6
N	Windungszahl	1			
N_D	Entmagnetisierungsfaktor	1			9.7
p	Druck	$\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$	Nm^{-2}	VAsm^{-3}	4.3
p	Laplace-Variable	s^{-1}			6.7, 10.1
P, p	Leistung	$\text{kg m}^2\text{s}^{-3}$	$W = \text{Nm/s} = \text{J/s}$	VA	4.5
q	Elementarladung	As	C		2.1
Q	Blindleistung	$\text{kg m}^2\text{s}^{-3}$	var	VA	6.5
Q	Güte	1			6.7
Q	Ladung	As	C		2.1
r	differentieller Widerstand	$\text{kg m}^2\text{s}^{-3}\text{A}^{-2}$	Ω	VA^{-1}	5.2
r	Verdampfungswärme	m^2s^{-2}	Wskg^{-1}		4.3
R	(Wirk-)Widerstand, Resistanz	$\text{kg m}^2\text{s}^{-3}\text{A}^{-2}$	Ω	VA^{-1}	2.2
R_m	magnetischer Widerstand	$\text{A}^2\text{s}^2\text{kg}^{-1}\text{m}^{-2}$	H^{-1}	$\text{AV}^{-1}\text{s}^{-1}$	9.3
s	Schmelzwärme	m^2s^{-2}	Wskg^{-1}		4.3
s	Weg	m			
S	Scheinleistung	$\text{kg m}^2\text{s}^{-3}$	VA	VA	6.5
t	Zeit	s			
T	Periodendauer	s			6.1
T	Temperatur	K			
T	Zeitkonstante	s			8.13, 10.1
ü	Übersetzungsverhältnis	1			9.14
U	Spannung	$\text{kg m}^2\text{s}^{-3}\text{A}^{-1}$	V	V	
v	Geschwindigkeit	m/s			
\dot{V}	Volumenstrom	m^3s^{-1}			
V	magnetische Spannung	A			9.3
V	Volumen	m^3			
W	Energie, Arbeit	$\text{kg m}^2\text{s}^{-2}$	$W_s = \text{Nm} = \text{J}$	VAs	4.2
X	Blindwiderstand, Reaktanz	$\text{kg m}^2\text{s}^{-3}\text{A}^{-2}$	Ω	VA^{-1}	6.5
Y	Scheinleitwert, Admittanz	$\text{A}^2\text{s}^3\text{m}^{-2}\text{kg}^{-1}$	S	AV^{-1}	6.5
z	Anzahl der Zweige	1			3
Z	Scheinwiderstand, Impedanz	$\text{kg m}^2\text{s}^{-3}\text{A}^{-2}$	Ω	VA^{-1}	6.5
α	Temperaturbeiwert	1/K	$1/\text{grd} = 1/^\circ\text{C}$		2.2

	physikalische Größe	SI-Einheit	abgeleitete SI-Einheit	m-s-V-A Einheit	ab Kap.
α	Zeigerausschlag beim Meßgerät	1 = rad			2.6
β	quadratischer Temperaturbeiwert	K ⁻²	K ⁻² = (°C) ⁻²		2.2
$\Delta\vartheta$	Temperaturdifferenz	K	grd = °C		
ϵ	elektrothermisches Äquivalent	kgm ² s ⁻³ A ⁻¹ K ⁻¹	V/K	VK ⁻¹	5.3
ϵ	absolute Dielektrizitätskonstante	A ² s ⁴ kg ⁻¹ m ⁻³	CV ⁻¹ m ⁻¹	AsV ⁻¹ m ⁻¹	8.6
ϵ_0	absolute Dielektrizitätskonstante des Vakuums	A ² s ⁴ kg ⁻¹ m ⁻³	CV ⁻¹ m ⁻¹	AsV ⁻¹ m ⁻¹	8.6
ϵ_r	relative Dielektrizitätskonstante	1			8.6
η	Wirkungsgrad	1			4.5
η	dynamische Viskosität	kgm ⁻¹ s ⁻¹	Nsm ⁻²	VAs ² m ⁻³	
Θ	Massenträgheitsmoment	kgm ²		VAs ³	4.3
Θ	magnetische Durchflutung	A			9.3
κ	elektrische Leitfähigkeit	A ² s ³ kg ⁻¹ m ⁻³	Sm/mm ² ; S/m	AV ⁻¹ m ⁻¹	2.2
Λ	magnetischer Leitwert	kgm ² A ⁻² s ⁻²	H	VsA ⁻¹	9.3
λ	Linienladung	Asm ⁻¹	Cm ⁻¹		8.4
μ	Induktionskonstante, Permeabilität	kgms ⁻² A ⁻²	TmA ⁻¹	VsA ⁻¹ m ⁻¹	9.1
μ_0	Induktionskonstante, Permeabilität des Vakuums	kgms ⁻² A ⁻²	TmA ⁻¹	VsA ⁻¹ m ⁻¹	9.1
μ_r	relative Permeabilität	1			9.1
ν	kinematische Viskosität	m ² s ⁻¹			
τ	Faktor der Flußverknüpfung	1			9.7
Φ	magnetischer Fluß	kgm ² s ⁻² A ⁻¹	Tm ²	Vs	9.3
Φ_v	Lichtstrom	cd*sr	lm		
Ψ	Verschiebungsfluß	As	C	As	8.5
Ω	normierte Frequenz	1			6.7
ω	Winkelgeschwindigkeit	1/s = rad/s			
ω	Kreisfrequenz	rad/s = s ⁻¹			6.2
ϑ	Temperatur	°C			2.2
φ	Phasenwinkel	rad = 1			6.2
φ	Potential	kgm ² s ⁻³ A ⁻¹	V	V	3.7, 4.1
ρ	spezifischer Widerstand	kgm ³ s ⁻³ A ⁻²	Ω mm ² /m; Ω m	VmA ⁻¹	2.2

Tabelle 1.2: Einheiten der physikalischen Größen, Auswahl

	physikalische Größe	Beschreibung, Name	Art	Umrechnung
a	Zeit	anno (Jahr)	Zusatz	1 a = 31 556 926 s
a	Fläche	Ar	Zusatz	1 Ar = 100 m ²
a	dekadischer Vorsatz	atto	Vielf	1 a = 10 ⁻¹⁸
A	Stromstärke	Ampere	SI-Basis	
Å	Länge	Ångström	Zusatz	1 Å = 0.1 nm = 10 ⁻¹⁰ m
acre	Fläche	USA	Ausland	1 acre = 4076.8 m ²
asb	Leuchtdichte	Apostilb	Ausland	1 asb = 0.318 cd m ⁻²
at	Druck	technische Atmosphäre	alt	1 at = 98066.5 Pa
atm	Druck	physikalische Atmosphäre	alt	1 atm = 101325 Pa
b	Fläche	Barn	alt	1 b = 10 ⁻²⁸ m ²
bar	Druck		Zusatz	1 bar = 1000 hPa = 10 ⁵ Pa
mbar	Druck	millibar	Zusatz	1 mbar = 1 hPa
bu	Volumen	bushel, USA	Ausland	1 bu = 0.03523 m ³
BTU	Wärmemenge	Britisch Thermal Unit	Ausland	1 BTU = 1055.06 J
c	dekadischer Vorsatz	Zenti	Vielf	c = 10 ⁻²
cal	Wärmemenge	Kalorie	alt	1 cal = 4.1868 J
cd	Lichtstärke	Candela	SI-Basis	
c/s	Kreisfrequenz	cycles per second	Ausland	c/s = s ⁻¹
C	Ladung	Coulomb	SI-abgl.	1 C = 1 As
°C	Temperatur	Celsius	Zusatz	θ/°C = T/K - 273.2
Ci	Aktivität	Curie	alt	1 Ci = 37*10 ⁹ s ⁻¹
CTU	Wärmemenge	Centigrade Thermal Unit	Ausland	1 CTU = 1.89851 J
d	Zeit	dies (Tag)	Zusatz	1 d = 86400 s
d	dekadischer Vorsatz	dezi	Vielf	1 d = 10 ⁻¹
da	dekadischer Vorsatz	deka	Vielf	1 da = 10 ¹
deg	Temperatur	degree	Ausland	1 deg = 1 K
dpt	inverse Länge	Dioptrie	Zusatz	1 dpt = 1 m ⁻¹
dyn	Kraft		alt	1 dyn = 10 ⁻⁵ N
Dez	Winkel		Ausland	1 Dez = 10 [°]
E	dekadischer Vorsatz	Exa	Vielf	E = 10 ¹⁸
erg	Arbeit		alt	1 erg = 10 ⁻⁷ J
eV	Energie	Elektronenvolt	Zusatz	1 eV = 1.602*10 ⁻¹⁹ J
f	dekadischer Vorsatz	femto	Vielf	1 f = 10 ⁻¹⁵
ft	Länge	foot / feet (Fuß)	Ausland	1 ft = 0.3048 m
ft ²	Fläche	square foot	Ausland	1 ft ² = 0.0929 m ²
ft ³	Volumen	cubic foot	Ausland	1 ft ³ = 0.02832 m ³

	physikalische Größe	Beschreibung, Name	Art	Umrechnung
ftlb	Arbeit	foot-pound	Ausland	1 ftlb = 1.356 J
ftcd	Beleuchtungsstärke	foot-candle	Ausland	1 ftcd = 10.763 Lx
ftla	Leuchtdichte	foot-Lambert	Ausland	1 ftla = $3.426 \cdot 10^4$ cdm ⁻²
F	Kapazität		SI-abgl.	1 F = 1 AsV ⁻¹
°F	Temperatur	Grad Fahrenheit	Ausland	$t/^{\circ}\text{F} = 1.8 \cdot t/^{\circ}\text{C} + 32$
g	Masse	Gramm	Zusatz	1 g = 10 ⁻³ kg
gal	Volumen	US gallon	Ausland	1 gal = 3.785 l
gal	Volumen	imp. gallon (UK)	Ausland	1 gal = 4.546 l
grd	Temperaturdifferenz		alt	1 grd = 1 K
G	dekadischer Vorsatz	Giga	Vielf	G = 10 ⁹
G	Flußdichte	Gauß	alt	1 G = 10 ⁻⁴ T
Gb	magnetische Spannung	Gilbert	Ausland	1 Gb = 0.796 A
Gal	Beschleunigung		alt	1 Gal = 0.01 ms ⁻²
h	Zeit	hora (Stunde)		1 h = 3600 s
h	dekadischer Vorsatz	Hekto		h = 10 ²
h.p.	Leistung	horse power	Ausland	1 h.p. = 745.7 W
ha	Fläche	Hektar	Zusatz	1 ha = 10 ⁴ m ²
H	Induktivität	Henry	SI-abgl.	1 H = 1 VsA ⁻¹
Hz	Frequenz	Hertz	Zusatz	1 Hz = s ⁻¹
in	Länge	Inch (Zoll)	Ausland	1 in = 25.4 mm
in ²	Fläche	Square Inch	Ausland	1 in ² = 6.5416 cm ²
inHg	Druck	Inch Mercury	Ausland	1 inHg = 3386 Pa
J	Arbeit, Energie, Wärmemenge	Joule	SI-abgl.	1 J = 1 Nm = 1 Ws
k	dekadischer Vorsatz	Kilo	Vielf	k = 10 ³
kg	Masse	Kilogramm	SI-Basis	
kp	Kraft	Kilopond	alt	1 kp = 9.80665 N
kcal	Wärmemenge	Kilokalorie	alt	1 kcal = 4186.8 J
kWh	Arbeit, Energie	Kilowattstunde	Zusatz	1 kWh = $3.6 \cdot 10^6$ J = $3.6 \cdot 10^6$ Ws
kn	Geschwindigkeit	Knoten	Zusatz	1 kn = 0.5144 ms ⁻¹
kp/cm ²	Druck		alt	1 kp/cm ² = 98066.5 Pa
kpm	Drehmoment, Arbeit	Kilopondmeter	alt	1 kpm = 9.80665 Nm
K	absolute Temperatur	Kelvin	SI-Basis	
Kt	Masse	Karat	Zusatz	1 Kt = 0.0002 kg
l	Volumen	Liter	Zusatz	1 l = 10 ⁻³ m ³
la	Leuchtdichte	Lambert	Ausland	1 la = $3.18 \cdot 10^3$ cd m ⁻²
lb	Kraft	pound	Ausland	1 lb = 4.448 N
lb/in ²	Druck	pound per square inch	Ausland	1 lb/in ² = 6895 Pa

	physikalische Größe	Beschreibung, Name	Art	Umrechnung
lm	Lichtstrom	Lumen	SI-abgl.	1 lm = 1 cd*sr
lm*s	Lichtmenge	Lumensekunde	SI-abgl.	1 lm*s = 1 cd*sr*s
lx	Beleuchtungsstärke	Lux	SI-abgl.	1 lx = 1 lm/m ²
lx*s	Belichtung	Luxsekunde	SI-abgl.	
Lj	Länge	Lichtjahr	Zusatz	1 Lj = 9.46051*10 ¹⁵ m
m	Länge	Meter	SI-Basis	
m	dekadischer Vorsatz	milli	Vielf	m = 10 ⁻³
m ²	Fläche		SI-Zusatz	
m ³	Volumen		SI-Zusatz	
ma	dekadischer Vorsatz	Myria	Ausland	ma = 10 ⁴
mb	Druck	millibar	alt	1 mb = 100 Pa = 1 hPa
mi	Länge	(status) Meilen	Ausland	1 mi = 1609.344 m
mi ²	Fläche	Quadrat Meilen	Ausland	1 mi = 2.59 km ²
mil	Länge	Mil	Ausland	1 mil = 25.4*10 ⁻⁶ m
min	Zeit	Minute	Zusatz	1 min = 60 s
mmHg	Druck	Millimeter Quecksilber	alt	1 mmHg = 133.322 Pa
mol	Stoffmenge	Mol	Si-Basis	
mWs	Druck	Meter Wassersäule	alt	1 mWs = 9806.65 Pa
M	dekadischer Vorsatz	Mega	Vielf	M = 10 ⁶
Mx	magnetischer Fluß	Maxwell	Ausland	1 Mx = 10 ⁻⁸ Wb = 10 ⁻⁸ Vs
n	dekadischer Vorsatz	nano	Vielf	n = 10 ⁻⁹
N	Kraft	Newton	SI-abgl.	1 N = 1 kgms ⁻²
Nm	Arbeit, Drehmoment	Newtonmeter	SI-Zusatz	1 Nm = 1 J = 1 Ws = 1 VAs
N/m ²	Druck		SI-Zusatz	1 N/m ² = 1 Pa
Ns	Impuls	Newtonsekunde	SI-Zusatz	
NM	Länge	nautische Meile	Zusatz	1 NM = 1852 m
Oe	magnetische Feldstärke	Oerstedt	alt	1 Oe = 79.58 Am ⁻¹
p	dekadischer Vorsatz	pico	Vielf	p = 10 ⁻¹²
p	Kraft	Pond	alt	1 p = 0.009806 N
P	dekadischer Vorsatz	Peta	Vielf	P = 10 ¹⁵
P	dynamische Viskosität	poise		1 P = 0.1 Pas
Pa	Druck	Pascal	SI-abgl.	1 Pa = 1 Nm ⁻²
Pa*s	dynamische Viskosität	Pascalsekunde	SI-Zusatz	
PS	Pferdestärke	Leistung	alt	1 PS = 735.498 W
rad	Winkel	Radian	SI-Sond.	[rad] = 1
rad*s ⁻¹	Winkelgeschwindigkeit		SI-Sond.	rad*s ⁻¹ = s ⁻¹
rad*s ⁻²	Winkelbeschleunigung		SI-Sond.	rad*s ⁻² = s ⁻²

	physikalische Größe	Beschreibung, Name	Art	Umrechnung
rd	Energiedosis	Rad	alt	1 rd = 0.01 J/kg
rem	Energiedosis	Rem	alt	1 rem = 0.01 J/kg
R	Ionendosis	Röntgen	alt	1 R = 0.258 mCkg ⁻¹
°R	Temperatur	Grad Rankine	Ausland	T/K = 1.8*t/°R + 459.67
°Re	Temperatur	Grad Reaumur	Ausland	T/K = 0.8*t/°Re + ?
s	Zeit	Sekunde	SI-Basis	
s ⁻¹	Frequenz, Drehzahl, Aktivität		SI-Zusatz	
sb	Leuchtdichte	stilb	alt	1 sb = 10 ⁴ cdm ⁻²
sm	Länge	Seemeile	Ausland	1 sm = 1852 m
sr	Raumwinkel	Steradian	SI-Sond.	[sr] = 1
st	Kinematische Viskosität	Stokes	alt	1 st = 10 ⁻⁴ m ² s ⁻¹
sqft	Fläche	Square Foot	Ausland	1 sqft = 0.0929 m ²
sqyd	Fläche	Square Yard	Ausland	1 sqyd = 0.836 m ²
S	Leitwert	Siemens	SI-abgl.	1 S = 1 Ω ⁻¹ = 1 A/V
Sm ⁻¹	elektrische Leitfähigkeit		SI-Sond.	1 Sm ⁻¹ = 1 AV ⁻¹ m ⁻¹
t	Masse	Tonne	Zusatz	1 t = 10 ³ kg
tex	längenbezogene Masse	Tex	Zusatz	1 tex = 10 ⁻⁶ kgm ⁻¹
T	dekadisches Vielfaches	Tera	Vielf	T = 10 ¹²
T	magnetische Flußdichte	Tesla	SI-abgl.	1 T = 1Vsm ⁻²
Torr	Druck	Torr	alt	1 Torr = 133.322 Pa
u	atomare Masseneinheit		Zusatz	1 u = 1.66*10 ⁻²⁷ kg
V	elektrische Spannung, Potential	Volt	SI-abgl.	1V = 1kgm ² A ⁻¹ s ⁻³
VA	Scheinleistung, Leistung	Voltampere	SI-Zusatz	1VA = 1W
Vm ⁻¹	elektrische Feldstärke		SI-Zusatz	
W	Leistung	Watt	SI-abgl.	1W=1VA=1Nms ⁻¹ =1Js ⁻¹ =1kgm ² s ⁻³
Wb	magnetische Fluß	Weber	SI-abgl.	1 Wb = 1 Vs
Wbm ⁻²	magnetische Flußdichte		SI-Zusatz	1 Wbm ⁻² = 1Vsm ⁻² = 1 T
Wkg ⁻¹	Energiedosisrate		SI-Zusatz	
Ws	Energie, Arbeit	Wattsekunde	SI-Zusatz	1Ws=1VAs=1Nm=1J=1kgm ² s ⁻²
Wsr ⁻¹	Strahlstärke		SI-Zusatz	
yd	Länge	Yard	Ausland	1yd = 0.91440 m
Zoll	Länge	Zoll ("), inch	Ausland	1" = 1 Zoll = 0.0254 m
Ω	Widerstand	Ohm	SI-abgl.	1Ω = 1VA ⁻¹

Tabelle 1.3: Einheiten in verschiedenen Systemen, Auswahl

1.3.4. Das Rechnen mit Einheiten

Bei jeder physikalischen Größengleichung (siehe Abschnitt 1.1) müssen u.a. auch Einheiten multipliziert werden. In diesem Abschnitt wird die Vorgehensweise erläutert. Bei reinen SI-Einheiten ist der Vorteil, daß sich als Ergebnis wieder eine SI-Einheit der entsprechenden physikalischen Größe ergibt. Eine Einheitenverknüpfung ist in diesen Fall nicht unbedingt notwendig, aber sehr ratsam. Bei falscher Formelumstellung oder bei Vergessen eines Multiplikanden ergibt sich über die Einheitenkontrolle das Auffinden eines Fehlers. Folgende schematisierte Reihenfolge führt zum Ergebnis:

- Evtl. auftretende zusätzliche ("Zusatz"), ausländische ("Ausland") oder alte ("alt") Einheiten nach Spalte 5, Tabelle 1.3 durch SI-Einheit ersetzen.
- Dekadische Vielfache nach Tabelle 1.1 durch Zehnerpotenzen ersetzen.
- Abgeleitete SI-Einheiten evtl. durch Tabelle 1.2, Spalte 3 oder Spalte 5 ersetzen. In der Elektrotechnik wird meist Spalte 5 verwendet, da das "Volt" nicht durch kg u.s.w. ersetzt wird.
- Zahlenwert berechnen.
- Zahlenwert evtl. mit dekadischen Vielfachen umformen.
- Die sich ergebende Einheit vergleichen mit der zu erwartenden Einheit (evtl. mit Hilfe von Tabelle 1.2).

Beispiel 1:

$$l = \frac{5 \text{ mym} * 7 \text{ cm} * (9 \text{ mm})^2}{30 \text{ mm} * 10 \text{ cm}^2}$$

ersetzen:

$$\begin{aligned} \mu &= 10^{-6} \\ k &= 10^3 \\ c &= 10^{-2} \\ m^2 &= (10^{-3})^2 = 10^{-6} \\ m &= 10^{-3} \\ c^2 &= (10^{-2})^2 = 10^{-4} \end{aligned}$$

$$l = \frac{5 * 10^{-6} m * 7 * 10^{-2} m * 9^2 * 10^{-6} m^2}{30 * 10^{-3} m * 10 * 10^{-4} m^2}$$

$$l = 0.945 * 10^{-6} m = 0.945 \mu m$$

Der Schritt Ersetzen beim oberen Beispiel kann bei einiger Routine entfallen. Z.B. wird "μ" sofort durch 10^{-6} ersetzt.

Beispiel 2:

$$I = \frac{4 \text{ W}}{200 \text{ V}}$$

ersetzen:

$$W = VA$$

$$I = \frac{4 \text{ VA}}{200 \text{ V}} = 0.02 \text{ A} = 20 * 10^{-3} \text{ A} = 20 \text{ mA}$$

Einheit A für I (laut Tabelle 1.2) korrekt.

Beispiel 3:

$$R = \frac{(0.2 \text{ kV})^2}{8 \text{ mW}}$$

ersetzen: $k = 10^{-3}$, $W = VA$, $m = 10^{-3}$

$$R = \frac{(0.2 * 10^3 \text{ V})^2}{8 * 10^{-3} \text{ VA}} = 5 * 10^6 \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

ersetzen: $10^6 = M$ $V/A = \Omega$

$R = 5 \text{ M}\Omega$ Einheit korrekt

Beispiel 4:

$$1 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{10^3 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 0.278 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Beispiel 5:

$$1 \frac{\text{h.p.}}{\text{in}^2} = \frac{745.7 \text{ W}}{6.542 * 10^{-4} \text{ m}^2} = 1.140 * 10^6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$1.140 * 10^6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 1.140 \frac{\text{MW}}{\text{m}^2} = 1.140 \frac{\text{W}}{(10^{-3} \text{ m})^2} = 1.14 \frac{\text{W}}{\text{mm}^2}$$

Beispiel 6: (Studenten)

$$l = \frac{96 \mu\text{m} * 20 \text{ mm}^2 * 5 \text{ cm}^2 * (10^{-2} \text{ km})^2}{8 \text{ mm}^2 * 6 \text{ cm}^3 * 5 \text{ km}}$$

$$l = \frac{96 * 10^{-6} \text{ m} * 20 * 10^{-6} \text{ m}^2 * 5 * 10^{-4} \text{ m}^2 * (10^{-2} * 10^3 \text{ m})^2}{8 * 10^{-6} \text{ m}^2 * 6 * 10^{-6} \text{ m}^2 * 5 * 10^3 \text{ m}}$$

$$l = 0.0004 \text{ m} = 0.4 * 10^{-3} = 400 * 10^{-6} \text{ m} = 0.4 \text{ mm} = 400 \mu\text{m}$$

Beispiel 7: (Studenten)

$$U = \sqrt{4 \text{ MW} * 10 \text{ m}\Omega}$$

$$U = \sqrt{4 * 10^6 \text{ VA} * 10 * 10^{-3} \frac{\text{V}}{\text{A}}} = \sqrt{40000 \text{ V}^2} = 200 \text{ V}$$

1.4. Schreibweise und Konventionen

Buchstabenart

Mit **großen Buchstaben** werden Gleichstromgrößen und Effektivwerte bezeichnet. Zeitabhängige Größen erhalten in der Regel **kleine Buchstaben** als Formelzeichen.

Komplexe Zahlen

Im Gegensatz zur theoretischen Mathematik erhält zur Kennzeichnung einer komplexen Zahl die physikalische Größe einen waagerechten Strich unterhalb des Formelbuchstabens.

Beispiel: $\underline{U} = 20 \text{ V} + j30 \text{ V}$

Vektoren

Gerichtete physikalische Größen sind Vektoren, die mit einem Pfeil über dem Formelzeichen gekennzeichnet werden. In alten Lehrbüchern werden Vektoren mit deutschen Buchstaben dargestellt. In Druckwerken findet man Vektoren auch in fett oder kursiv ausführt.

Beispiel: Kraft \vec{F}

Matrizen und Vektoren als Zusammenfassung vom Komponenten

Anwendung: Mehrere Widerstände oder mehrere Ströme werden zu Vektoren zusammengefaßt. Diese Zusammenfassungen werden mit einem waagerechten Strich über dem Formelbuchstabe bezeichnet. In Druckwerken ist wiederum die Ausführung fett oder kursiv üblich. Auch der waagerechte Strich unter dem Formelbuchstaben ist manchmal üblich. Dieses ist aber zur Unterscheidung von komplexen Zahlen in der Elektrotechnik nicht üblich.

Normierung

Bei größeren Zahlenrechnungen (z.B. Lösungen von linearen Gleichungssystemen) ist es lästig, immer die Einheiten zu notieren. Es wird dann auf eine physikalische Größe normiert. Im Rahmen dieser Vorlesung wird wie folgt normiert als Beispiel:

$$U_{\text{Norm}} = 1 \text{ V}$$

Normierungsspannung (alle Größen sind auf 1 V bezogen)

$$U = 15 \text{ V}$$

tatsächlich Spannung

$$U^N = \frac{U}{U_{\text{Norm}}} = 15$$

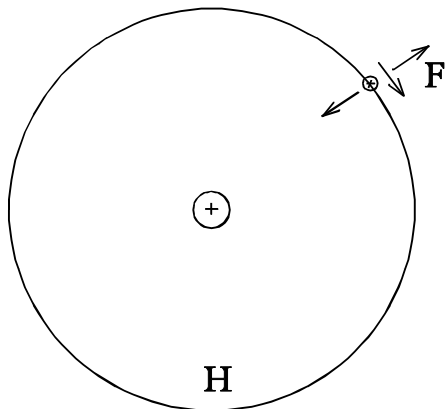
normierte Spannung

2. Der einfache Gleichstromkreis

2.1. Definitionen und Grundbegriffe

Bevor die Frage beantwortet werden soll, was Strom und Spannung ist, sollen einfache Atommodelle kurz wiederholt werden.

2.1.1. Atommodelle und Molekülmodelle



Durchmesser Atomkern:	$20 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
Durchmesser Elektron:	$3 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
Abstand Atomkern Elektron:	$50000 \cdot 10^{-12} \text{ m}$

Bild EG211A: Modell des Wasserstoff-Atoms

Das Modell des Wasserstoff-Atoms basiert auf der Vorstellung einer positiven Kernladung und einer negativen Ladung des Elektrons. Das Elektron bewegt sich in einer bestimmten Entfernung auf einer Kreis- oder Kugelbahn mit einer bestimmten Geschwindigkeit um den Kern. Ungleiche Ladungen ziehen sich an. Das Kräfte-Gleichgewicht wird durch die Zentrifugalkraft wieder hergestellt. In der modernen Physik wird die Elektronenbewegung sowohl als Teilchenbewegung (leichter verständlich) als auch als Welle angesehen. Bei der Wellentheorie wird mit Aufenthaltswahrscheinlichkeiten gerechnet. Hier soll nur die Bewegung anhand von Teilchen diskutiert werden. Zu vermuten ist, daß Ladungsträger etwas mit Strom und Spannung zu tun haben.

Beim oberen Wasserstoff Atom ist es schwer, die beiden Ladungen zu trennen, weil diese relativ fest miteinander verbunden sind.

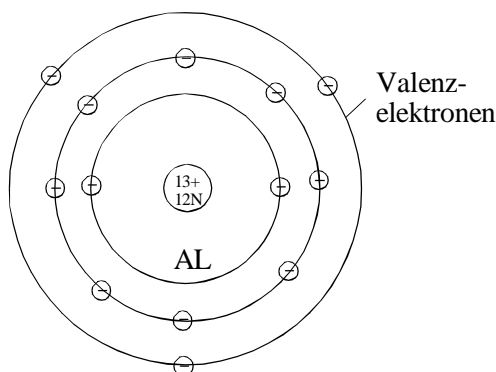


Bild EG211B: Aluminium-Atom

Anders sieht die Bindung der Ladung z.B. bei Aluminium aus. Aluminium hat im Kern 13 positive Protonen und zusätzlich 14 neutrale Neutronen. Die innerste Elektronenschale ist mit zwei Elektronen besetzt und die zweite mit acht. Damit Ladungsgleichgewicht herrscht, müssen auch die 3 restlichen Kernladungen mit negativ geladenen Elektronen kompensiert werden. Diese negativen Ladungen befinden in der äußersten Schale relativ lose an den Kern angebunden. Die Elektronen in den äußeren Bahnen werden Valenzelektronen genannt.

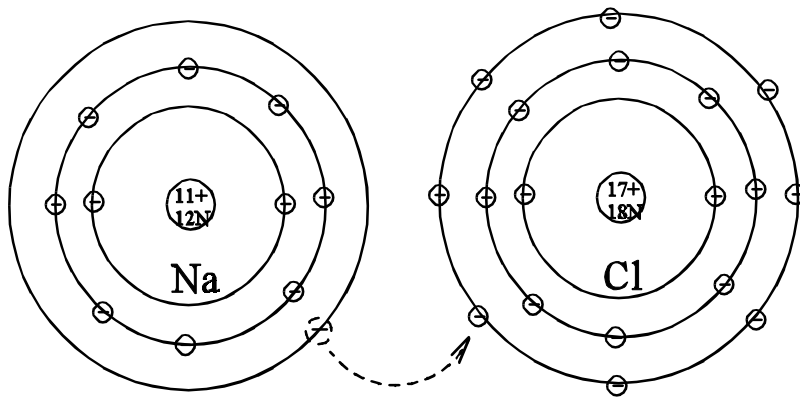


Bild EG211C: Salz-Molekül (Natrium und Chlor) NaCl

Die Molekül-Bindung beruht darauf, daß ein System (hier Molekül) möglichst ein Energieminimum hat. Gibt das Natrium-Atom ein Elektron an das Chlor-Atom ab, ist die äußere Schale des Na-Atoms leer und die des Cl-Atoms voll. Dieses bewirkt die sogenannte molekulare Anziehung. Weil das Na-Atom ein Elektron abgegeben hat, ist es ladungsmäßig "eins" positiv. Das Cl-Atom hat ein Elektron aufgenommen, darum ist es ladungsmäßig "eins" negativ. Positiv und negative Ladungen ziehen sich an, daher die molekulare Bindung.

2.1.2. Was ist Strom

Behauptung: **Strom ist die geordnete Bewegung von Ladungsträgern.**

Definition der Stromrichtung

Die Bewegung von Ladungsträgern wurde als erstes im Elektrolyten (elektrisch leitende Flüssigkeit) anhand von positiven Ionen (vergleiche ionisiertes Na-Atom in Bild EG21C) entdeckt. Historisch wurde somit die beobachtete Richtung als Stromrichtung definiert. **Die technische Stromrichtung ist die Richtung von positiven Ladungsträgern.**

Formelbuchstabe

I

Einheit

Als Einheit des Stromes wurde eine SI-Basis-Einheit eingeführt, das Ampere, als Abkürzung "A".

$$[I] = 1 \text{ A}$$

Definition des Amperes:

1 A ist die Stärke eines zeitlich unveränderten Stromes durch zwei parallele lange Leiter, die im Abstand von 1 m eine Kraft von $0.2 \cdot 10^{-6} \text{ N}$ je Meter ausübt.

2.1.3. Was ist Spannung

Gesucht ist die Ursache für den Strom. Eine Ladungstrennung verursacht unterschiedliche Raumladungen, die sich aufgrund der Anziehung von Ladungsträgern auszugleichen sucht und dabei einen Strom verursacht. Die Höhe der Wirkung der Ladungsträgertrennung wird als elektrische Spannung bezeichnet.

Der Punkt mit positiver Ladungshäufung wird Pluspol genannt. Der Punkt mit negativer Ladungshäufung Minuspol. Zwischen beiden Punkten tritt die Spannung auf, siehe Bild EG213A.

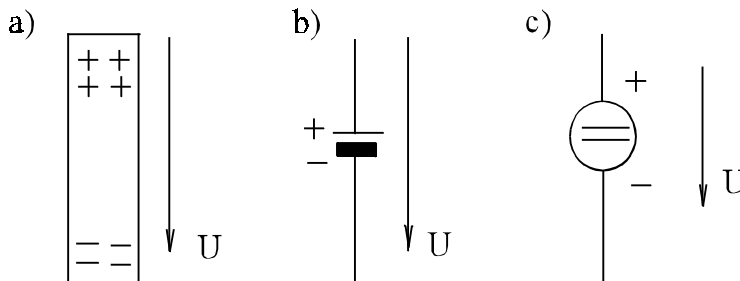


Bild EG213A: a) schematische Ladungstrennung
b) Schaltzeichen
c) Ersatzschaltbild (ESB) Element der idealen Gleichspannungsquelle

In Bild EG213A ist die Ladungstrennung oder auch Spannung schematisch angedeutet. Daneben ist das Schaltzeichen einer Batterie angedeutet. Später wird die Spannungsquelle nur noch als Ersatzschaltbild (ESB) verwendet.

Spannung:	Ursache:	Trennung von Ladungsträgern
	Formelbuchstabe:	U
	Einheit:	V

Die SI-Einheit der Spannung wurde schon in Abschnitt 1.3.3 erwähnt:

$$[U] = 1 \text{ V} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3} \text{ A}^{-1}$$

Eine detaillierte Herleitung der oberen Einheit wird in Abschnitt 4.1.1 gegeben.

Ladungstrennungen können auf verschiedenen physikalischen Effekte basieren. Näher sollen diese Effekte in Kap. 5 diskutiert werden. In Tabelle 2.1 ist jeweils nur die Angabe des physikalischen Effektes mit Name der technischen Spannungsquelle angegeben. Die physikalischen Erklärungen der Effekte werden später gegeben, teilweise erst in folgenden Semestern.

physikalische Effekte, Wirkung	Gerät
Lorentz-Kraft, Induktion, Magnetismus	Dynamo, Generator
chemische Spannungsreihe	Akku, Batterie
Druck, Piezo-Effekt	Piezo-Generator
Wärme	Thermoelement
Lichtstrahlung	Solarzelle, Fotozelle
Reibung, elektrostatische Ladungstrennung	Bandgenerator

Tabelle 2.1: Ursache der Spannung

Spannungsbereiche:

Energietechnik:	bis 1000 kV
Nachrichtentechnik:	µV bis zu einigen V
Gewitter:	einige MV, Durchbruchfeldstärke etwa 25 kV/cm

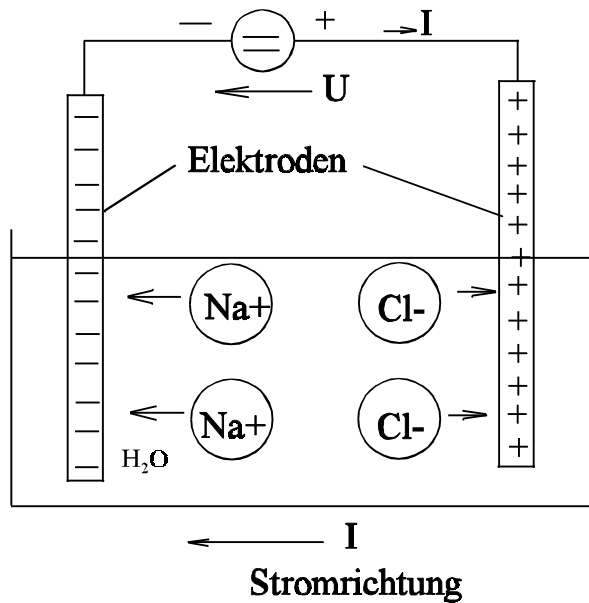
2.1.4. Stromleitung im Elektrolyten

Bild EG214A:

Die Stromleitung im Elektrolyten ist in Bild EG214A schematisch angedeutet. Ein Elektrolyt ist eine elektrisch leitende Flüssigkeit. Der Stromtransport erfolgt durch Ionenbewegung. Was sind Ionen. Diese sind aufgespaltene Moleküle, die dadurch elektrisch geladen werden. Gibt man z.B. Kochsalz (NaCl , siehe Bild EG211C) in Wasser (H_2O), wird die molekulare Bindung zwischen Na und Cl gelöst und das Salz geht als Lösung ins Wasser. Die Bindung erfolgte durch Elektronenaustausch. Nach der Aufspaltung behält das Chlor-Atom das vom Na abgegebene Elektron und ist somit negativ geladen. Das Na-Atom hat ein Elektron weniger und ist somit über alles (Protonen und Elektronen) gesehen positiv geladen. Beide geladenen Teilchen werden als Ionen bezeichnet.

Unter Anlegen einer Spannung versucht sich der Elektronenmangel und Elektronenüberschuß auszugleichen. Dieses ist möglich. Die negativen Cl^- Ionen wandern zum Elektronenmangel, also zum positiven Ladungsüberschuß. Jedesmal, wenn ein Cl^- Ion ankommt, wird eine positive Ladung kompensiert. Gerade entgegengesetzt sind die Verhältnisse an der anderen Elektrode, wo die positiven Na^+ Ionen hin wandern. Dort kompensiert das positive Na^+ Ion ein Elektron.

Weil zu Anfang die Bewegung von positiven Ionen im Elektrolyten beobachtet wurde, ist heute die technische Stromrichtung die Richtung von positiven Ladungsträgern.

2.1.5. Stromleitung in Metallen

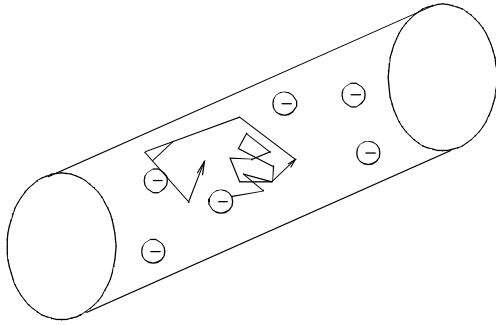


Bild EG215A: Elektronenbewegung ohne Anlegen einer Spannung

Bei Metallen sind in der äußeren Schale nur wenige Elektronen vorhanden. Im Kristall-Gitter sind die Elektronen auf der letzten Schale (Valenzelektronen) relativ frei beweglich. Aufgrund der thermischen Energie bewegen sich die Elektronen im Kristall-Gitter sehr unregelmäßig. Im Mittel tritt keine Ortsveränderung auf, also auch kein Ladungstransport. Dieses ist in Bild EG215A dargestellt.

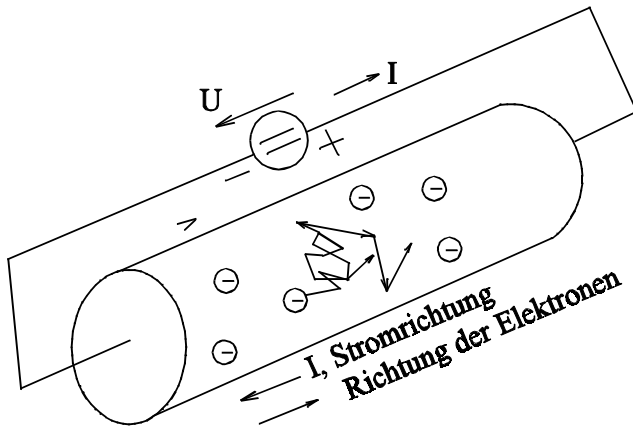


Bild EG215B: Elektronenbewegung bei Anlegen einer Spannung

Bei Anlegen einer Spannung überlagern sich zwei Bewegungen, siehe Bild EG215B. Zur unregelmäßigen Bewegung nach Bild EG215A überlagert sich eine resultierende Bewegung um den Elektronenmangel und -überschuß der Spannungsquelle auszugleichen. Es tritt eine Bewegung von negativen Ladungsträgern (Elektronen) auf. Stromrichtung und Elektronenrichtung sind unterschiedlich.

Stromrichtung: außerhalb der Spannungsquelle von plus nach minus
innerhalb der Spannungsquelle von minus nach plus

2.1.6. Ladung

Die Ladung eines Elektrons und eines Protons sind betragsmäßig gleich. Der Wert ist eine Naturkonstante. Aus Verständnisgründen sollte die Maßeinheit eigentlich eine SI-Einheit sein, ist es aber nicht, sondern eine abgeleitete.

Einheit: 1 C

Formelzeichen: Q

Die Elementarladung eines Protons beträgt

$$q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Die Ladung eines Elektrons ist negativ

$$e = -q = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

2.1.7. Zusammenhang Ladung und Strom

Der Strom ist die Bewegung von Ladungen. Bei Gleichstrom ist der Strom nicht von der Zeit abhängig, sondern konstant. Zeitabhängige Größen werden klein geschrieben, konstante Größen mit großen Buchstaben. Die Größe des Stromes ist definiert als die Ladung pro Zeit. Bei zeitlich veränderlichen Größen muß der Differentialquotient geschrieben werden.

$$i = \frac{dQ}{dt} \qquad I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q}{t}$$

Einheiten:

$$Q = I \cdot t$$

$$[Q] = [I] \cdot [t]$$

$$1 \text{ C} = 1 \text{ As}$$

Obere Herleitung ergibt, daß die abgeleitete SI-Einheit Coulomb (C) in SI-Einheiten Ampere mal Sekunde ist. Dieses läßt sich mit allen abgeleiteten SI-Einheiten durchführen, siehe Tabelle 1.2 und 1.3.

2.1.8. Stromdichte

Definition: Der Strom pro Fläche wird als Stromdichte bezeichnet

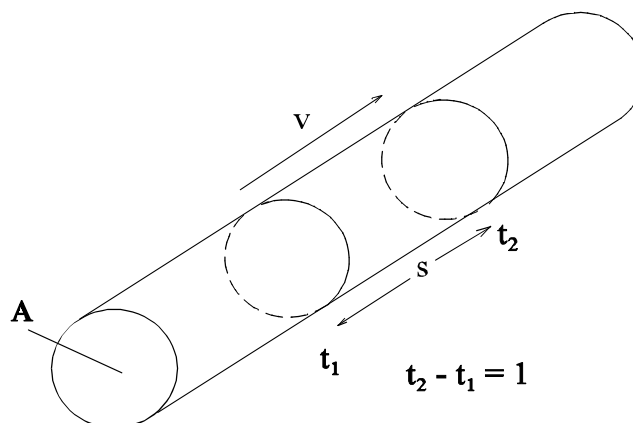
Formelbuchstabe: J (oder S)

Gleichung: $J = \frac{I}{A}$

Einheit: $[J] = \frac{[I]}{[A]}$ $[J] = \frac{A}{m^2}$

2.1.9. Ladungsträger-Geschwindigkeit in einem Leiter

Es soll angenommen werden, daß sich die Ladungsträger in einem Leiterabschnitt der Länge s in der Zeit t um den resultierenden Weg s bewegt haben, siehe Bild EG219A. Einfacher ist es immer, die Bewegung von positiven



Ladungsträgern zu betrachten. Die Bewegung der Elektronen ist entgegengesetzt zur Richtung der positiven Ladungsträger. Die Anzahl der Ladungsträger m in dem betrachteten Volumenelement aus Bild EG219A soll betrachtet werden.

Bild EG219A

Eine Materialeigenschaft ist die Anzahl der zur Verfügung stehenden freien Ladungsträger bezo-

gen auf das Volumen:

$$n\text{- Ladungsträgerdichte (Teilchen pro Volumen)} \quad [n] = \frac{1}{m^3} = \frac{\text{Teilchen}}{m^3}$$

Die Anzahl der freien Ladungsträger m im Volumenabschnitt nach Bild EG219A ergibt sich aus der Multiplikation von Ladungsträgerdichte n und dem Volumen V :

$$m = n \cdot V = n \cdot A \cdot s$$

Bei den meisten Metallen gilt für die Ladungsträgerdichte der Näherungswert:

$$n \approx 10^{23} \text{ cm}^{-3} = 10^{20} \frac{1}{\text{mm}^3} = 10^{29} \frac{1}{\text{m}^3}$$

Die in der Zeit t transportierte Ladung Q ergibt sich aus der Multiplikation der Anzahl der Elektronen m und der Elementarladung q :

$$Q = m \cdot q = n \cdot A \cdot s \cdot q$$

Die Stromstärke ist als Ladung pro Zeit definiert:

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{n \cdot A \cdot s \cdot q}{t} = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(n \cdot A \cdot s \cdot q) = n \cdot A \cdot q \cdot \frac{ds}{dt}$$

Der Ausdruck ds/dt ist die resultierende Geschwindigkeit v . Somit ergibt sich die Stromstärke I :

$$I = n \cdot A \cdot v \cdot q$$

Die Stromdichte läßt sich aus Strom pro Fläche berechnen:

$$J = \frac{I}{A} = n \cdot v \cdot q$$

Zahlenbeispiel:

$$A = 1 \text{ mm}^2$$

$$I = 10 \text{ A}$$

$$n = 10^{23} \text{ cm}^{-3} = 10^{20} \text{ mm}^{-3}$$

$$v = \frac{I}{n \cdot A \cdot q} = \frac{10 \text{ A}}{10^{20} \frac{1}{\text{mm}^3} \cdot 1 \text{ mm}^2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}}$$

$$v = 0.625 \frac{\text{mm}}{\text{s}} = \frac{0.625 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{\frac{1}{3600} \text{ h}} = 2.25 \frac{\text{m}}{\text{h}}$$

Aus der oberen Berechnung des Zahlenwertes sind zwei Punkte anzumerken:

Bei zahlenwertmäßiger Berechnung physikalischer Gleichungen muß immer mit Einheiten gerechnet werden, denn eine physikalische Größe ist Zahlenwert mal Einheit. Das Ergebnis muß von der Einheit sein, die man erwartet, siehe oben. Dort ist die Einheit der Geschwindigkeit mm/s oder m/h korrekt.

Die obere resultierende Triftgeschwindigkeit in einem Leiter ist relativ langsam. Die Geschwindigkeit der Elektronen ist nicht zu vergleichen mit der Impulsgeschwindigkeit beim Einschalten (z.B. einer Lampe). Diese ist fast Lichtgeschwindigkeit.

2.1.10. Minimal-Stromkreis

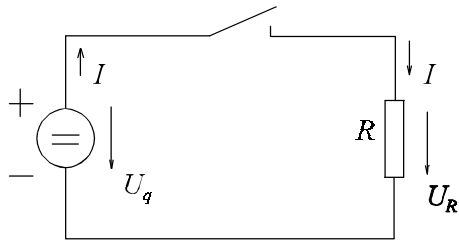


Bild EG2110A: Minimal-Stromkreis

Nach Bild EG2110A besteht ein Stromkreis mindestens aus:

- Spannungsquelle
- Widerstand und
- Schalter

Im einfachen Fall, Bild EG2110A, sind bei passiven Elementen, hier am Widerstand R, Strom I und Spannung U in einer Richtung. Strom und Spannung sind am Verbraucher von Plus nach Minus gerichtet. Später wird gezeigt, daß damit ein Energieverbrauch verbunden ist.

An der Spannungsquelle sind die Richtungen von Strom und Spannung unterschiedlich. Auch hier ist die Spannung von Plus nach Minus gerichtet. Der Strom fließt dagegen bei Energieabgabe von Minus nach Plus.

2.1.11. Wirkung des elektrischen Stromes

Wärmewirkung: Nach einer vereinfachten Theorie wird die Wärmewirkung durch Reibung der Elektronen am Gitter hervorgerufen. Die Festkörperphysik erklärt die Wärmewirkung als Energieaustausch, verursacht durch Stöße am Kristallgitter. Anwendung: Heizgeräte, Industrieöfen. Abfall: In jedem ohmschen Widerstand treten bei Stromfluß Verlustwärme auf.

Magnetische Wirkung:

1. **Die Bewegung von Ladungsträgern (Strom) verursacht ein Magnetfeld.** Magnetfelder lassen sich entweder mit Hilfe von Dauermagneten oder mit Hilfe elektrischer Ströme erzeugen.
2. Die Bewegung von Ladungsträgern im Magnetfeld bewirkt eine Kraft. Somit erfährt ein stromdurchflossener Leiter im Magnetfeld eine **Kraftwirkung**. Da bewegte Ladungsträger eine Kraft erfahren, läßt sich die magnetische Wirkung auch zur Ladungsträgerbewegung nutzen, z.B. zur Erzeugung von Elektronenmangel und -häufung. Die Folge: Eine induzierte Spannung aufgrund magnetischer Wirkung ruft die **Induktionswirkung** hervor. Anwendung: Motoren, Generatoren, Transformatoren und Meßgeräte.

Chemische Wirkung: Bei einem Stromfluß im Elektrolyten erfolgt ein Massentransport (Bewegung von Ionen) zwischen den Elektroden. Aufgrund unterschiedlicher Lösbarkeit der Metalle im Elektrolyten ergibt sich außerdem eine chemische Spannungsquelle. Anwendung: Zerlegung von Stoffen (z.B. H_2O), Laden und Entladen von Akkus, Batterien, Elektrolyse (Gewinnung chemisch reiner Stoffe).

Lichtwirkung: Die Lichtwirkung basiert auf der Energieabgabe in Form eines Lichtquants. Bei einem Übergang von einem Zustand (Elektronenradius) eines Atoms zu einem anderem tritt eine Energiedifferenz auf, die in Form eines Lichtquants abgegeben wird. Durch Energieanregung wurde das Atom vorher auf ein höheres Energieniveau gebracht. Diese Energieanregung kann auf zwei Arten erfolgen: Bei der Glühlampe wird die Energie in Form von Wärme zugeführt. Bei Gasentladungslampen und Leuchtdioden erfolgt die Energiezufuhr direkt durch den elektrischen Strom.

Elektrostatische Wirkung: Zwei elektrische Ladungen erfahren (je nach Vorzeichen) eine gegenseitige Anziehung oder Abstoßung. Außerdem verursacht eine Ladung ein elektrisches Feld. Anwendung: Elektrostatisches Meßwerk, Hochspannungs-Rauchgas-Filter und Kondensatoren.

Piezo-Effekt: Durch Druck auf Kristalle erfolgt eine Ladungsträgerverschiebung. Der Effekt ist auch umkehrbar. Der Piezo-Effekt tritt nur bei dynamischen Veränderungen ($d/dt \neq 0$) auf. Anwendung: Beschleunigungsaufnehmer, Spannungsquellen (Impulse) zum Zünden von Flammen und Schwingquarze.

Übungen zu Abschnitt 2.1

Aufgaben 2.1.10

Ein dotierter Halbleiter mit der Ladungsträgerkonzentration $n = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ soll eine Stromdichte von $J = 150 \text{ mA/mm}^2$ aufweisen. Wie groß ist die Driftgeschwindigkeit v der Elektronen?

gegeben: $n = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$
 $J = 150 \text{ mA/mm}^2$

gesucht: v

Lösung: $J = n \cdot v \cdot q$

$$v = \frac{J}{n \cdot q} = \frac{150 \cdot 10^{-3} \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}}{10^{16} \frac{1}{10^{-6} \text{m}^3} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{As}} = 93.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aufgabe 2.1.11

Ein Kondensator soll mit einer Ladung $Q = 40 \cdot 10^{-3} \text{ As}$ aufgeladen werden. Die Ladung erfolgt über einen Draht von $d = 0.1 \text{ mm}$ Durchmesser mit Hilfe einer Konstantstromquelle, die $t = 2 \text{ s}$ eingeschaltet werden soll.

- Wie groß ist der Stromstärke I ?
- Berechnen Sie die Stromdichte J .
- Zu bestimmen ist die Driftgeschwindigkeit v der Elektronen.
- Wieviele Elektronen sind auf den Platten des Kondensators verschoben?

gegeben: $Q = 40 \cdot 10^{-3} \text{ As}$
 $n = 10^{23} \text{ cm}^{-3}$ (Draht)
 $d = 0.1 \text{ mm}$
 $t = 2 \text{ s}$

gesucht: a) I
 b) J
 c) v
 d) m

Lösung:

$$\text{a) } I = \frac{Q}{t} = \frac{40 \cdot 10^{-3} \text{ As}}{2 \text{ s}} = 20 \text{ mA}$$

$$\text{b) } J = \frac{I}{A} = \frac{I}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \text{ A}}{\pi \cdot (0.1 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = 2.546 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}^2} = 2.546 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$$

$$\text{c) } v = \frac{J}{n \cdot q} = \frac{2.546 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}}{10^{23} \frac{1}{10^{-6} \text{m}^3} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{As}} = 0.159 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0.159 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

$$\text{d) } m = \frac{Q}{q} = \frac{40 \cdot 10^{-3} \text{ As}}{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}} = 2.5 \cdot 10^{17}$$

2.2. Ohmsches Gesetz

Die meisten physikalischen Formeln sind nach Beobachtungen bei Versuchen entwickelt worden. D.h. ein physikalischer Effekt wurde beobachtet und gemessen. Um das Meßergebnis zu interpretieren, wurde eine physikalische Theorie mit Formeln entwickelt, so auch beim ohmschen Gesetz. Im Rahmen dieser Vorlesung sollen keine Versuche durchgeführt werden, wohl aber verbal beschrieben.

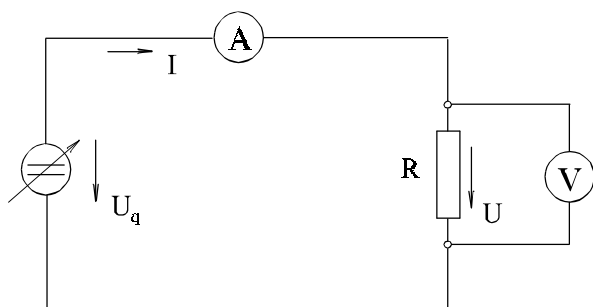


Bild EG22A: Versuch 2.1

Führt man den Versuch nach Bild EG22A durch und mißt Strom und Spannung an einem Widerstand, ergeben sich zugehörige Wertepaare von Strom und Spannung. Diese Wertepaare grafisch dargestellt, ergibt die Meßpunkte in Bild EG22B.

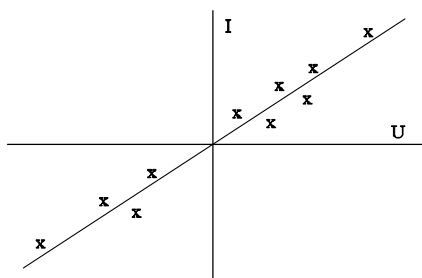


Bild EG22B: Meßergebnis Versuch 2.1

Die Meßwerte in Bild EG22B können recht gut mit Hilfe einer Geraden angepaßt werden. Diese Gerade geht durch den Nullpunkt. Mathematisch sind U und I einander proportional:

$$U \sim I$$

Dieses kann auch mit Hilfe einer Proportionalitäts-Konstanten angegeben werden:

$$U = c \cdot I$$

Wie wird nun die Proportionalitäts-Konstanten c genannt? Das ist der Widerstand R, der auch in Bild EG22A eingetragen werden kann. **Damit ergibt sich das bekannte ohmsche Gesetz:**

$$U = R \cdot I$$

Normalerweise reicht es aus, eine Formel in nur einer Form auswendig zu lernen, wenn überhaupt. Nur wichtige Formeln behält man im Kopf. Formeln sieht man nach und stellt sie um oder leitet die Formel her. Anders beim ohmschen Gesetz, dieses sollte in allen drei Formen bekannt sein:

$U = I \cdot R$	$I = \frac{U}{R}$	$R = \frac{U}{I}$
-----------------	-------------------	-------------------

Einheit von R

$$[R] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{V}{A} = \Omega$$

Definition

Die Einheit des Widerstandes ist V/A und wird als abgeleitete SI-Einheit Ω (Ohm) definiert.

Definition des Leitwertes

Der Kehrwert des Widerstandes R wird als Leitwert mit dem Formelbuchstaben G definiert:

Definition:

$$G = \frac{1}{R}$$

Einheit:

$$[G] = \frac{1}{\Omega} = \frac{A}{V}$$

Einheiten-Definition:

$$\frac{1}{\Omega} = S$$

Siemens

Ohmsches Gesetz mit Leitwerten:

$U = \frac{I}{G}$	$I = U \cdot G$	$G = \frac{I}{U}$
-------------------	-----------------	-------------------

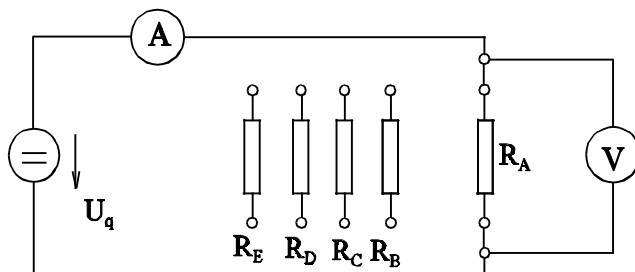
2.2.1. Formabhängigkeit des Widerstandes

Bild EG221A: Versuch 2.2: Formabhängigkeit des Widerstandes eines Cu-Drahtes

Um den Widerstandswert bei einfachen Geometrien zu berechnen, wird der Versuch 2.2 durchgeführt, mit fünf verschiedenen Draht-Widerständen. Einmal wird die Drahtlänge und einmal der Draht-Durchmesser verändert, siehe Bild EG221A und Tabelle EG221A. Nach Tabelle EG221A wird neben der Ausgangs-Länge l_0 auch der Ausgangsdurchmesser d_0 auf das zwei und dreifache Maß erhöht und der Widerstandswert gemessen. Damit soll festgestellt werden, ob eine lineare oder eine andere Abhängigkeit des Widerstandes von den variierten Größen vorhanden ist.

	l	d	R
A	$l_0 = 100 \text{ m}$	$d_0 = 0.1 \text{ mm}$	$R_0 = 227 \Omega$
B	$2l_0 = 200 \text{ m}$	$d_0 = 0.1 \text{ mm}$	$2R_0 = 455 \Omega$
C	$3l_0 = 300 \text{ m}$	$d_0 = 0.1 \text{ mm}$	$3R_0 = 682 \Omega$
D	$l_0 = 100 \text{ m}$	$2d_0 = 0.2 \text{ mm}$	$R_0/4 = 57 \Omega$
E	$l_0 = 100 \text{ m}$	$3d_0 = 0.3 \text{ mm}$	$R_0/9 = 25 \Omega$

Tabelle EG221A: Meßergebnisse Versuch 2.2

Ergebnis: Mit der Länge steigt auch der Widerstand proportional an. Mit dem Durchmesser nimmt der Widerstand quadratisch ab:

$$R \sim \frac{l}{d^2}$$

Was ist proportional d^2 ? Antwort: die Querschnittsfläche: $A \sim d^2$

Somit ist R von der Länge proportional abhängig und von der Querschnittsfläche umgekehrt proportional:

$$R \sim \frac{l}{A}$$

Einführung eines Proportionalitäts-Faktors: $R = c \cdot \frac{l}{A}$

Der Proportionalitäts-Faktors wird in diesem Fall **spezifischer Widerstand ρ** genannt:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

Aus den Meßwerten der Tabelle EG221A ergibt sich aus allen fünf Meßwerten das gleiche Ergebnis für Kupfer:

$$\rho = \frac{R \cdot A}{l} = \frac{R \cdot d^2 \cdot \pi}{4 \cdot l} = \frac{227 \, \Omega \cdot (0.1 \, \text{mm})^2 \cdot \pi}{4 \cdot 100 \, \text{m}} = 0.018 \frac{\Omega \, \text{mm}^2}{\text{m}} = 0.018 \frac{\Omega \cdot 10^{-6} \, \text{m}^2}{\text{m}} = 0.018 \cdot 10^{-6} \, \Omega \text{m}$$

Einheit des spezifischen Widerstandes:

$$[\rho] = \frac{\Omega \, \text{mm}^2}{\text{m}} \quad \text{üblich}$$

$$[\rho] = \Omega \, \text{m} \quad \text{auch üblich}$$

In analoger Weise zur Kombination Widerstand/Leitwert wird auch hier den Kehrwert des spezifischen Widerstandes definiert:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \quad \text{- spezifische Leitfähigkeit (}\sigma \text{ bei Physikern)}$$

$$[\kappa] = \frac{1}{[\rho]} = \frac{1}{\Omega \, \text{m}} = \frac{\text{A}}{\text{Vm}}$$

$$[\kappa] = \frac{\text{m}}{\Omega \, \text{mm}^2} \quad \text{auch üblich}$$

Spezielle Werte der spezifischen Leitfähigkeit und des spezifischen Widerstandes werden in Kap. 2.2.3. angegeben.

Die Widerstands-Berechnung ist somit auch mit Hilfe der Leitfähigkeit möglich:

$$R = \frac{l}{\kappa \cdot A}$$

2.2.2. Temperaturabhängigkeit von Widerständen

Um den Einfluß der Temperatur auf den Widerstand zu untersuchen, wird Versuch 2.3 durchgeführt. Dabei sind drei verschiedene Widerstände vorhanden, die alle bei $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ den gleichen Widerstandswert aufweisen. Mit Hilfe eines Bunsenbrenners werden die Widerstände erhitzt, siehe Bild EG222A. Das Ergebnis der Widerstandsveränderung ist in Bild EG222B dargestellt.

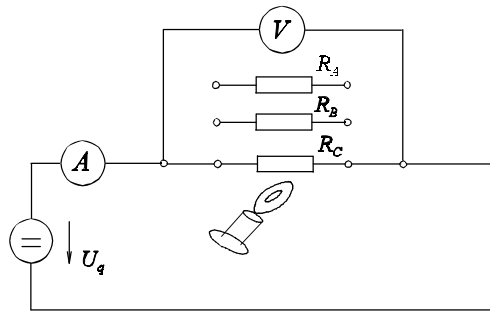


Bild EG222A: Versuch 2.3

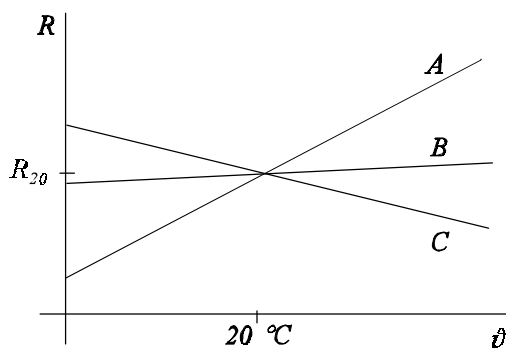


Bild EG222B: Ergebnis, Versuch 2.3

Interpretation des Ergebnisses:

Die drei Widerstände haben unterschiedliches Temperaturverhalten. Im Fall A steigt der Widerstand mit der Temperatur, während bei Fall C der Widerstand mit der Temperatur sinkt. Bei Fall B ist ein Widerstand mit einem geringen Temperatureinfluß vorhanden.

Fall A: PTC - Positiver Temperatur Koeffizient

Ursache: Größere Gitterschwingungen infolge höherer Temperatur verursachen bei Metallen mehrere Stöße zwischen Elektronen und Atomen. Dieses bedingt einen größeren Spannungsabfall und somit einen größeren Widerstand, z. B. bei Metallen.

Fall C: Bei Halbleitern stehen mit zunehmender Temperatur mehrere freie Elektronen zur Verfügung. Mehr freie Elektronen bedeuten höhere Leitfähigkeit und somit einen geringeren Widerstand.

Fall B: Spezial-Legierung um den Einfluß der Temperatur gering zu halten.

Auch Glas wäre ein Leiter. Spannt man einen Glasstab zwischen zwei Elektroden und erhitzt das Glas, stellt sich ein elektrischer Strom ein.

Die einfachste mathematische Annäherung des Temperaturverlaufs nach Bild EG222B erfolgt durch eine Gerade:

$$R(\vartheta) = R_{20} + \alpha \cdot (\vartheta - 20^\circ\text{C}) \cdot R_{20}$$

$$R(\vartheta) = R_{20} \cdot [1 + \alpha \cdot (\vartheta - 20^\circ\text{C})]$$

α ist der Temperaturbeiwert.

$$[\alpha] = \frac{1}{^{\circ}\text{C}} = \frac{1}{\text{K}}$$

Eine bessere Anpassung ergibt sich durch eine Parabel:

$$R(\vartheta) = R_{20} * [1 + \alpha * (\vartheta - 20^{\circ}\text{C}) + \beta * (\vartheta - 20^{\circ}\text{C})^2]$$

Die zweite Form der Annäherung (Parabel) ist für größere Temperaturabweichungen als 100°C zu verwenden.

Wie für den Widerstand ergibt sich die gleiche Temperaturabhängigkeit auch für den spezifischen Widerstand, weil sich die geometrischen Daten um etwa zwei Zehnerpotenzen geringer verändern.

$$\rho(\vartheta) = \rho_{20} * [1 + \alpha * (\vartheta - 20^{\circ}\text{C}) + \beta * (\vartheta - 20^{\circ}\text{C})^2]$$

Bei kleineren Temperaturdifferenzen kann β vernachlässigt werden.

Faustregel: Bei vielen Metallen nimmt der Widerstand bei 10°C Temperaturerhöhung um etwa 4% zu.

Beiweis: $\Delta\vartheta = 10^{\circ}\text{C}$ $\Delta\rho = \rho_{20} * \alpha * \Delta\vartheta$

$$\Delta\rho/\rho_{20} = \alpha * \Delta\vartheta = 0.004^{\circ}\text{C}^{-1} * 10^{\circ}\text{C} = 0.04 \triangleq 4\%$$

2.2.3. Material-Werte

Material	$\rho_{20} / \frac{\text{mm}^2 \Omega}{\text{m}}$	$\kappa / \frac{\text{m}}{\Omega \text{ mm}^2}$	$\alpha / \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$	$\beta / \frac{1}{^{\circ}\text{C}^2}$
Silber	0.016	63	0.0038	$0.7 * 10^{-6}$
Kupfer	0.018	56	0.0039	$0.6 * 10^{-6}$
Alu	0.0286	35	0.0038	$\approx 0.6 * 10^{-6}$
Stahl	0.1...0.5	2...10	≈ 0.0052	
Konstantan	0.43	2.3	10^{-5}	
Wolfram	0.055	18	0.0041	10^{-6}
Kohle	6...80	0.01...0.2	-0.003...-0.008	

Tabelle 2.2

Übungen zu Abschnitt 2.2

Aufgabe 2.2.10

Eine Glühlampe mit einer Wolframwendel nimmt im Betrieb bei $\vartheta = 2200\text{ }^{\circ}\text{C}$ einen Strom von $I = 0.5\text{ A}$ bei einer Spannung von $U = 230\text{ V}$ auf. Wie groß ist der Einschaltstrom bei $\vartheta = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$?

gegeben: Wolfram-Wendel $\alpha = 0.0041\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ $\beta = 10^{-6}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-2}$
 $\vartheta = 2200\text{ }^{\circ}\text{C}$
 $I = 0.5\text{ A}$
 $U = 230\text{ V}$

gesucht: I_{40} bei $\vartheta = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$

$$R_{2200} = R_{20}[1 + \alpha(\vartheta_{2200} - 20\text{ }^{\circ}\text{C}) + \beta(\vartheta_{2200} - 20\text{ }^{\circ}\text{C})^2]$$

$$R_{40} = R_{20}[1 + \alpha(\vartheta_{40} - 20\text{ }^{\circ}\text{C}) + \beta(\vartheta_{40} - 20\text{ }^{\circ}\text{C})^2]$$

$$\frac{R_{40}}{R_{2200}} = \frac{1 + \alpha(\vartheta_{40} - 20\text{ }^{\circ}\text{C}) + \beta(\vartheta_{40} - 20\text{ }^{\circ}\text{C})^2}{1 + \alpha(\vartheta_{2200} - 20\text{ }^{\circ}\text{C}) + \beta(\vartheta_{2200} - 20\text{ }^{\circ}\text{C})^2}$$

$$R_{2200} = \frac{U}{I} = \frac{230\text{ V}}{0.5\text{ A}} = 460\text{ }\Omega$$

$$R_{40} = 460\text{ }\Omega \cdot \frac{1 + 0.0041\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}(40\text{ }^{\circ}\text{C} - 20\text{ }^{\circ}\text{C}) + 10^{-6}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-2}(40\text{ }^{\circ}\text{C} - 20\text{ }^{\circ}\text{C})^2}{1 + 0.0041\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}(2200\text{ }^{\circ}\text{C} - 20\text{ }^{\circ}\text{C}) + 10^{-6}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-2}(2200\text{ }^{\circ}\text{C} - 20\text{ }^{\circ}\text{C})^2}$$

$$R_{40} = 460\text{ }\Omega \cdot \frac{1 + 0.082 + 0.0004}{1 + 8.938 + 4.7524} = 460\text{ }\Omega \cdot \frac{1.082}{14.69} = 33.88\text{ }\Omega$$

$$I_{40} = \frac{U}{R_{40}} = \frac{230\text{ V}}{33.88\text{ }\Omega} = 6.79\text{ A}$$

Achtung: Der Einschaltstrom ist sehr viel größer als der Betriebsstrom!

Hinweis: Bei kleinen Temperaturdifferenzen hat der quadratische Term keine große Auswirkung.

Aufgabe 2.2.11

Eine Spule aus Cu-Draht mit $N = 2000$ Windungen, $D = 5\text{ cm}$ mittleren Wicklungsdurchmesser, $d = 0.15\text{ mm}$ Drahtdurchmesser liegt bei $\vartheta = 110\text{ }^{\circ}\text{C}$ an einer Spannung von $U = 10\text{ V}$. Wie groß ist der Strom I_{110} bei $\vartheta = 110\text{ }^{\circ}\text{C}$?

gegeben: Cu-Draht $\kappa = 56\text{ m}\Omega^{-1}\text{mm}^{-2}$ $\alpha = 0.0039\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$
 $N = 2000$ Windungen
 $D = 5\text{ cm}$ Wicklungsdurchmesser
 $d = 0.15\text{ mm}$ Drahtdurchmesser
 $U = 10\text{ V}$
 $\vartheta = 110\text{ }^{\circ}\text{C}$

gesucht: I_{110} bei $\vartheta = 110\text{ }^{\circ}\text{C}$

$$R_{20} = \frac{l}{\kappa \cdot A} = \frac{N \cdot \pi D}{\kappa \cdot d^2 \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{4N \cdot D}{\kappa \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 2000 \cdot 5 \cdot 10^{-2}\text{ m}}{56 \frac{\text{m}}{\Omega \text{ mm}^2} \cdot (0.15\text{ mm})^2} = 317.5\text{ }\Omega$$

$$R_{110} = R_{20} \cdot [1 + \alpha \cdot (110\text{ }^{\circ}\text{C} - 20\text{ }^{\circ}\text{C})] = 317.5\Omega [1 + 0.0039\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1} \cdot 90\text{ }^{\circ}\text{C}] = 428.9\text{ }\Omega$$

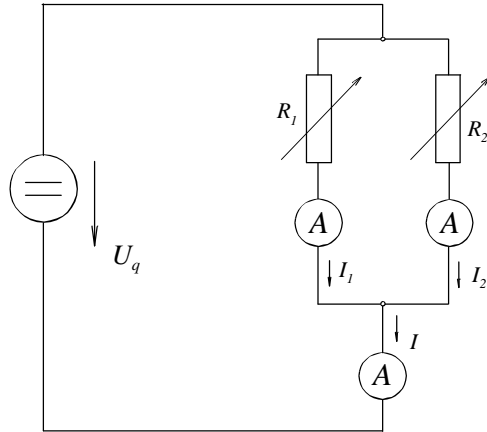
$$I_{110} = \frac{U}{R_{110}} = \frac{10\text{ V}}{428.9\text{ }\Omega} = 23.3 \cdot 10^{-3}\text{ A} = 23.3\text{ mA}$$

2.3. Kirchhoffsche Regeln

Die Kirchhoffschen Gesetze sind Aussagen über Strom- und Spannungssummen.

2.3.1. Erstes Kirchhoffsche Gesetz

Um das erste Kirchhoffsche Gesetz zu erläutern, wird Versuch 2.4 durchgeführt, siehe Bild EG231A.



$$\text{Ergebnis: } I = I_1 + I_2$$

Bei der oberen Anordnung werden die parallelen Ströme I_1 und I_2 gemessen und mit dem Strom I verglichen. Es ergibt sich, daß I immer die Summe von I_1 und I_2 ist.

Bild EG231A: Versuch 2.4

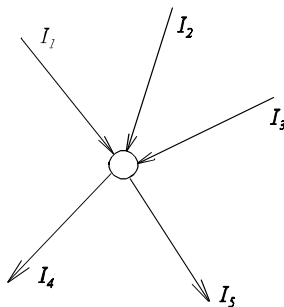
Physikalische Erklärung:

Der Strom ist durch die Anzahl der Elektronen pro Zeit bestimmt. Die Elektronen können sich hier nur im Leiter bewegen. Fließen diese parallel zusammen, addiert sich die Anzahl der Elektronen und somit auch der Strom.

Erstes Kirchhoffsche Gesetz:

(Form A)

Die Summe der reinfließenden Ströme in einem Knotenpunkt ist gleich der Summe der rausfließenden Ströme, siehe Bild EG231B.



$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5$$

Bild EG231B

Erstes Kirchhoffsche Gesetz:

(Form B)

Die Summe der Ströme an einem Knoten ist gleich Null. Dazu gilt die Vereinbarung:
reinfließender Strom : positiv
rausfließender Strom : negativ

Allgemein:
$$\sum_{j=1}^n I_j = 0$$

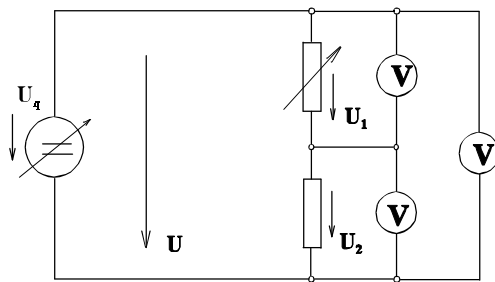
!!! Richtung der Ströme beachten !!!

Für Bild EG231B gilt dann:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0$$

2.3.2. Zweites Kirchhoffsche Gesetz

Um das zweite Kirchhoffsche Gesetz zu erläutern, wird der Versuch 2.5 durchgeführt, siehe Bild EG232A.



$$\text{Ergebnis: } U = U_1 + U_2$$

Bild EG232A: Versuch 2.5

Die Spannung an der Reihenschaltung zweier Widerstände wird untersucht. Egal welcher Parameter (R_1 oder U_q in Versuch 2.5) verändert wird, die Spannung an der Reihenschaltung ist immer die Summe der Einzelspannungen.

Zweites Kirchhoffsches Gesetz: (Form A)

Die Summe der abfallenden Spannungen an den Widerständen in einem Stromkreis, besser allgemein ausgedrückt in einer Masche, ist gleich der Summe der erzeugenden Spannungen.

$$\sum U = \sum U_q$$

Für das obere Beispiel gilt: $U_q = U_1 + U_2$

Eine Masche ist ein geschlossener Umlauf in einem Stromkreis. Ein Stromkreis kann mehrere Maschen aufweisen. Zur allgemeinen Auswertung bekommt eine Masche eine Maschenrichtung, die im ESB mit eingezeichnet wird. Dann kann das zweite Kirchhoffsche Gesetz in folgender Form angegeben werden:

Zweites Kirchhoffsches Gesetz: (Form B)

Die Summe der Spannungen in einer Masche ist Null unter Beachtung des Vorzeichens. Dabei wird nicht mehr zwischen Quellspannungen und abfallenden Spannungen unterschieden. Spannungen in Maschenrichtung werden positiv gezählt und entgegengesetzt der Maschenrichtung negativ.

$$\sum_{j=1}^n U_j = 0$$

Für das obere Beispiel gilt: $-U_q + U_1 + U_2 = 0$ (Maschenrichtung rechts)

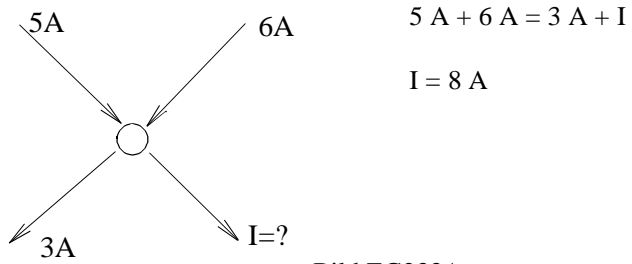
Beispiele zu Abschnitt 2.3**Beispiel 1:**

Bild EG233A

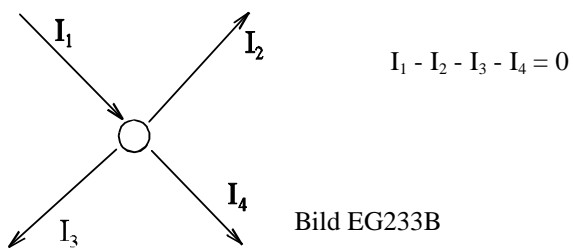
Beispiel 2:

Bild EG233B

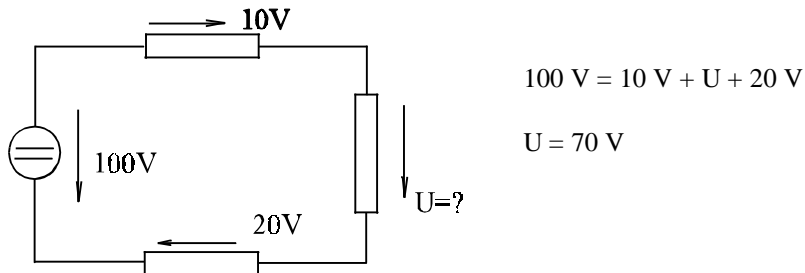
Beispiel 3:

Bild EG233C

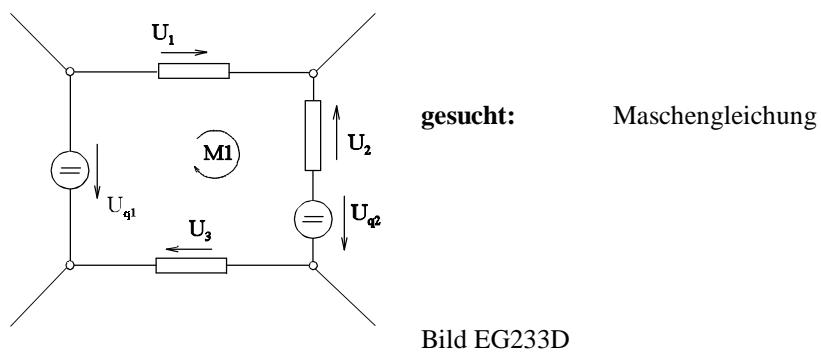
Beispiel 4:

Bild EG233D

Prinzip zum Lösen von Beispiel 4:

Maschenrichtung "M1" einzeichnen, danach Summe U gleich Null bilden.

$$U_1 - U_2 + U_{q2} + U_3 - U_{q1} = 0$$

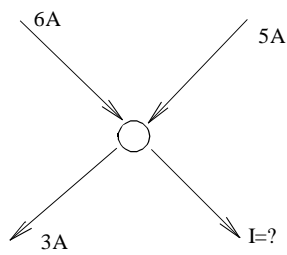
Beispiel 5: (Studenten)Ergebnis: $I = 8 \text{ A}$

Bild EG233E

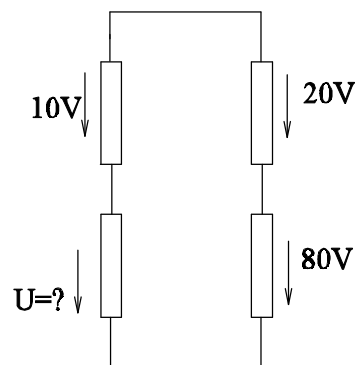
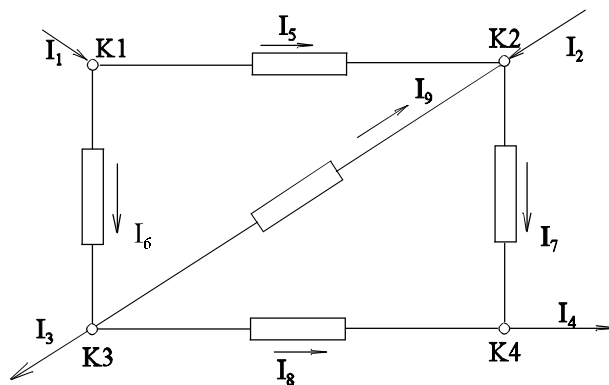
Beispiel 6: (Studenten)Ergebnis: $U = 90 \text{ V}$

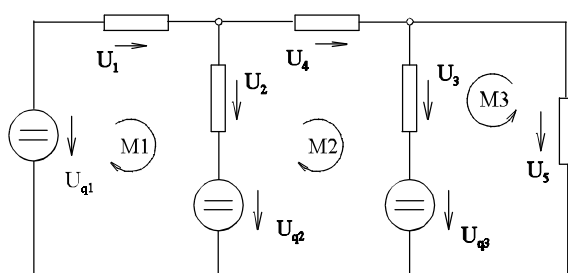
Bild EG233F

Beispiel 7: (Studenten)

Ergebnis:

$$\begin{aligned} K1 &= I_1 - I_5 - I_6 = 0 \\ K2 &= I_2 + I_5 + I_9 - I_7 = 0 \\ K3 &= I_6 - I_9 - I_3 - I_8 = 0 \\ K4 &= I_8 + I_7 - I_4 = 0 \end{aligned}$$

Bild EG233G

Beispiel 8: (Studenten)

Ergebnis:

$$\begin{aligned} M1 &= U_1 + U_2 + U_{q2} - U_{q1} = 0 \\ M2 &= U_4 + U_3 + U_{q3} - U_{q2} - U_2 = 0 \\ M3 &= U_3 + U_{q3} - U_5 = 0 \end{aligned}$$

Bild EG233H

2.4. Ersatzwiderstände

2.4.1. Ersatzreihenwiderstand

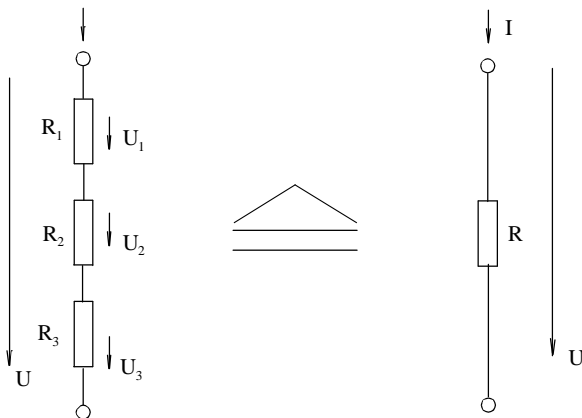


Bild EG241A: Ersatz-Reihenschaltung von Widerständen

Nach Bild EG241A soll versucht werden, die Reihenschaltung mehrerer Widerstände zu einem Widerstand zusammenzufassen. Dazu die folgende Herleitung:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \quad U_1 = R_1 \cdot I \quad U_2 = R_2 \cdot I \quad U_3 = R_3 \cdot I$$

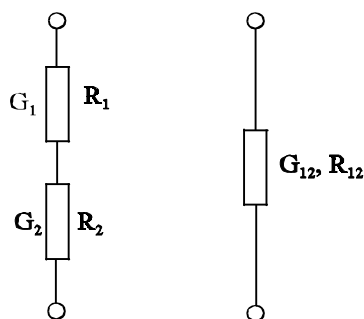
$$U = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + R_3 \cdot I$$

$$U = (R_1 + R_2 + R_3) \cdot I \quad U = R \cdot I$$

$$R = R_1 + R_2 + R_3 \quad \text{Ersatz-Reihenwiderstand}$$

Bei einer Reihenschaltung werden die Widerstände addiert.

Auch für die Leitwerte kann eine Formel für die Reihenschaltung angegeben werden:



$$R_{12} = R_1 + R_2$$

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}$$

$$G_{12} = \frac{1}{\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}} = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2}$$

Bild EG241B

2.4.2. Ersatzparallelwiderstand

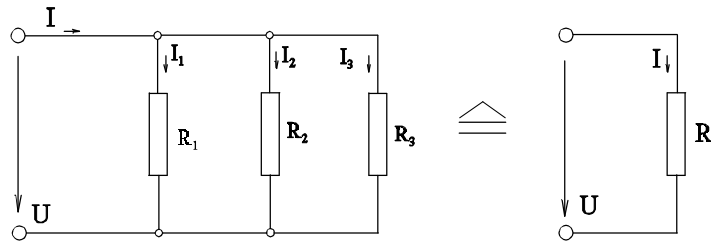


Bild EG42A: Ersatz-Parallelschaltung von Widerständen

Nach Bild EG242A soll versucht werden, die Parallelschaltung mehrerer Widerstände zu einem Widerstand zusammenzufassen. Dazu die folgende Herleitung:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \quad I_2 = \frac{U}{R_2} \quad I_3 = \frac{U}{R_3}$$

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3}$$

$$I = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) * U$$

$$I = \frac{1}{R} * U$$

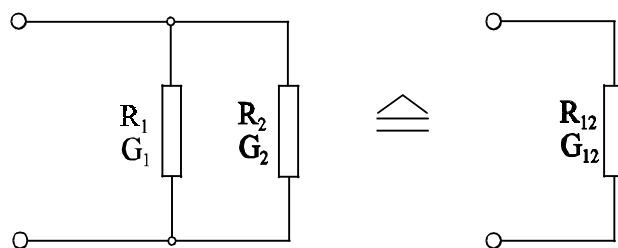
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Ersatz-Parallelwiderstand

$$G = G_1 + G_2 + G_3$$

Ersatz- Parallelleitwert

In einer Parallelschaltung werden die Leitwerte addiert.



$$G_{12} = G_1 + G_2$$

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$R_{12} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2}$$

Bild EG242B

2.4.3. Berechnung von Netzen mit einer Spannungsquelle mit Hilfe des Ersatzwiderstandes

Prinzip: Das Netz wird soweit zu einem Ersatzwiderstand umgeformt, daß an der Spannungsquelle nur noch ein Ersatz-Widerstand vorhanden ist. Danach werden rückwärts alle anderen elektrischen Größen berechnet. Dazu drei Beispiele.

Beispiel 1:

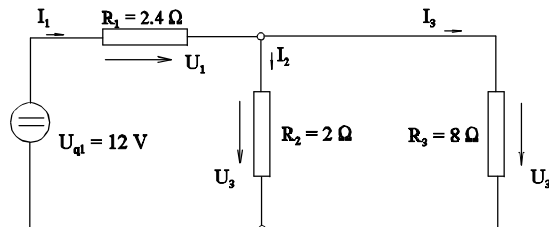
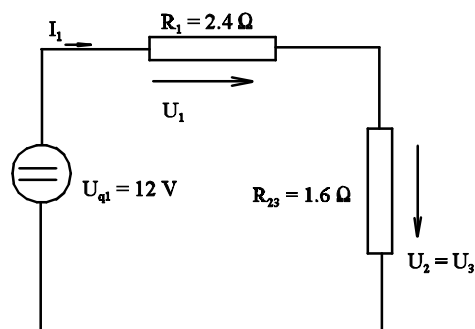
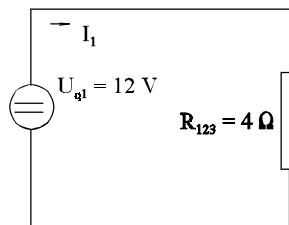


Bild EG243A



$$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{2 \, \Omega \cdot 8 \, \Omega}{2 \, \Omega + 8 \, \Omega} = 1.6 \, \Omega$$

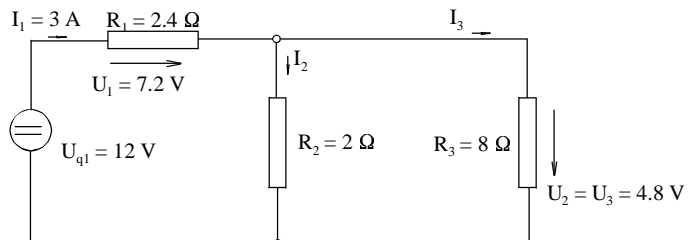
Bild EG243B



$$R_{123} = R_1 + R_{23} = 2.4 \, \Omega + 1.6 \, \Omega = 4 \, \Omega$$

$$I_1 = \frac{U_{q1}}{R_{123}} = \frac{12 \, V}{4 \, \Omega} = 3 \, A$$

Bild EG243C



$$U_1 = I_1 \cdot R_1 = 3 \, A \cdot 2.4 \, \Omega = 7.2 \, V$$

$$U_2 = U_3 = R_{23} \cdot I_1 = 1.6 \, \Omega \cdot 3 \, A = 4.8 \, V$$

Bild EG243D

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{4.8 \, V}{2 \, \Omega} = 2.4 \, A$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{4.8 \, V}{8 \, \Omega} = 0.6 \, A$$

Beispiele zu Abschnitt 2.4

Beispiel 2:

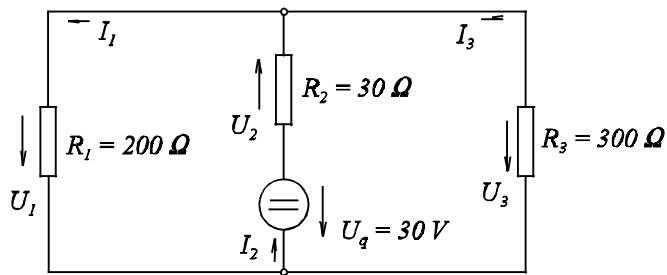


Bild EG244A

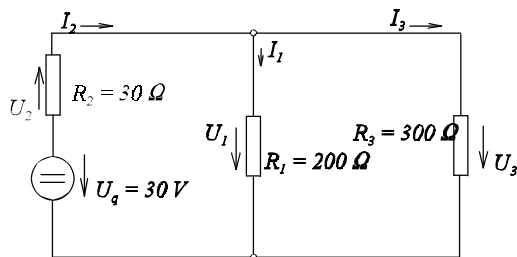


Bild EG244B

$$R_{ges} = 30 \, \Omega + \frac{1}{\frac{1}{200 \, \Omega} + \frac{1}{300 \, \Omega}} = 150 \, \Omega$$

$$I_2 = \frac{U_q}{R_{ges}} = \frac{30 \, V}{150 \, \Omega} = 0.2 \, A$$

$$U_2 = I_2 \cdot R_2 = 0.2 \, A \cdot 30 \, \Omega = 6 \, V$$

$$U_1 = U_3 = U_q - U_2 = 30 \, V - 6 \, V = 24 \, V$$

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{24 \, V}{200 \, \Omega} = 0.12 \, A$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{24 \, V}{300 \, \Omega} = 0.08 \, A$$

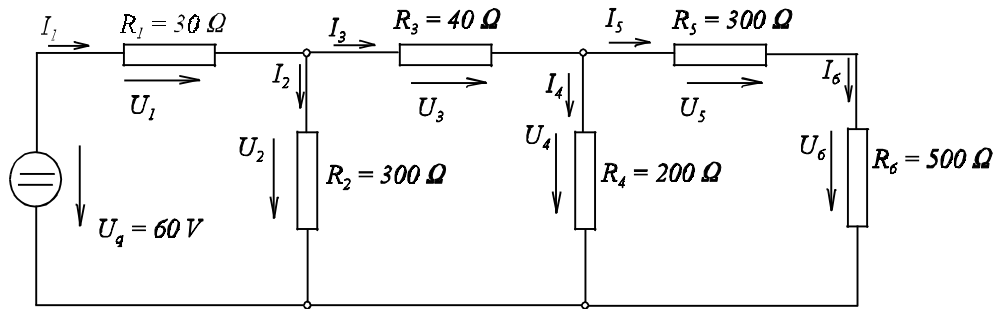
Beispiel 3:

Bild EG244C

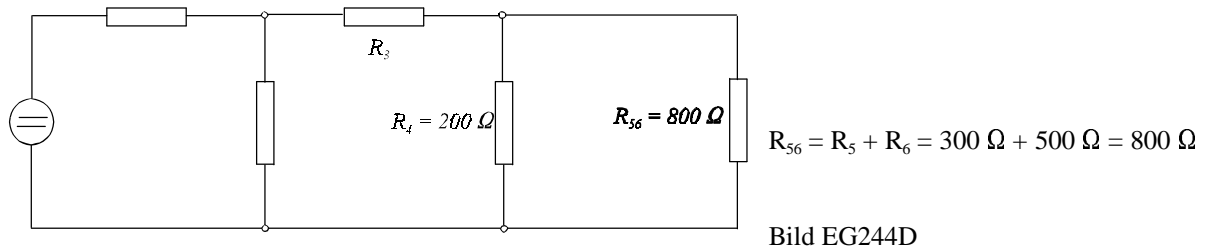


Bild EG244D

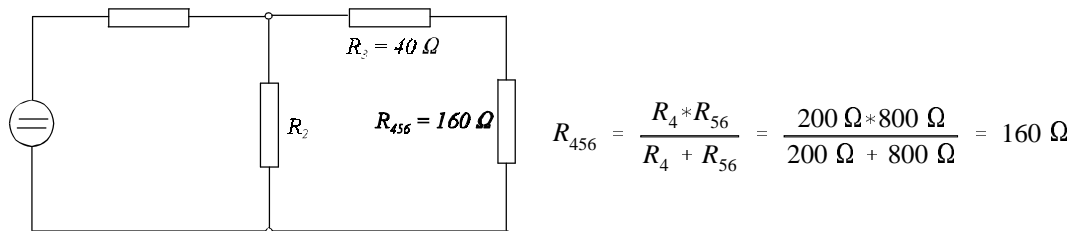


Bild EG244E

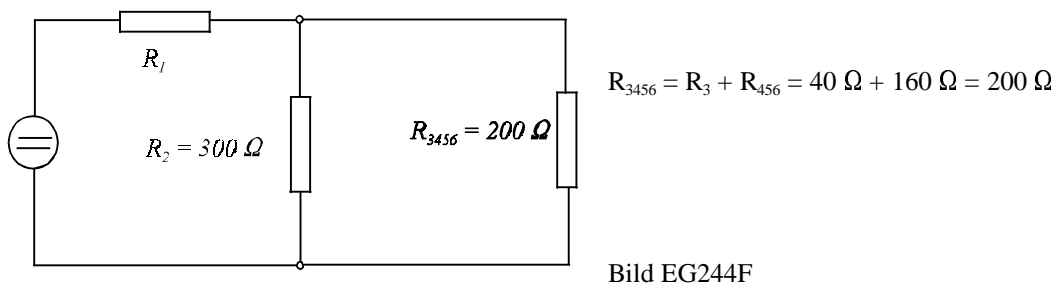


Bild EG244F

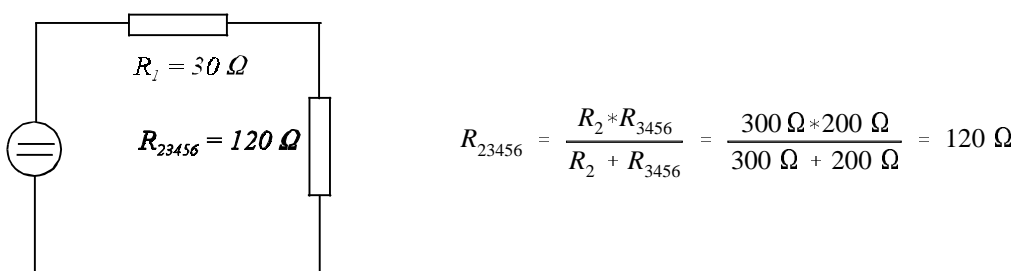
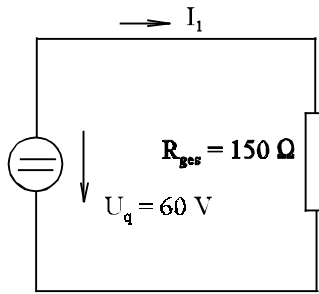


Bild EG244G



$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_{23456} = 30 \, \Omega + 120 \, \Omega = 150 \, \Omega$$

Bild EG244H

$$I_1 = \frac{60 \, \text{V}}{150 \, \Omega} = 0.4 \, \text{A}$$

$$U_1 = I_1 * R_1 = 0.4 \, \text{A} * 30 \, \Omega = 12 \, \text{V}$$

$$U_2 = U_q - U_1 = 60 \, \text{V} - 12 \, \text{V} = 48 \, \text{V}$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{48 \, \text{V}}{300 \, \Omega} = 0.16 \, \text{A}$$

$$I_3 = I_1 - I_2 = 0.4 \, \text{A} - 0.16 \, \text{A} = 0.24 \, \text{A}$$

$$U_3 = I_3 * R_3 = 0.24 \, \text{A} * 40 \, \Omega = 9.6 \, \text{V}$$

$$U_4 = U_2 - U_3 = 48 \, \text{V} - 9.6 \, \text{V} = 38.4 \, \text{V}$$

$$I_4 = \frac{U_4}{R_4} = \frac{38.4 \, \text{V}}{200 \, \Omega} = 0.192 \, \text{A}$$

$$I_5 = I_3 - I_4 = 0.24 \, \text{A} - 0.192 \, \text{A} = 0.048 \, \text{A} = I_6$$

$$U_5 = I_5 * R_5 = 0.048 \, \text{A} * 300 \, \Omega = 14.4 \, \text{V}$$

$$U_6 = I_6 * R_6 = 0.048 \, \text{A} * 500 \, \Omega = 24 \, \text{V}$$

2.5. Strom- und Spannungsteiler

2.5.1. Spannungsteiler

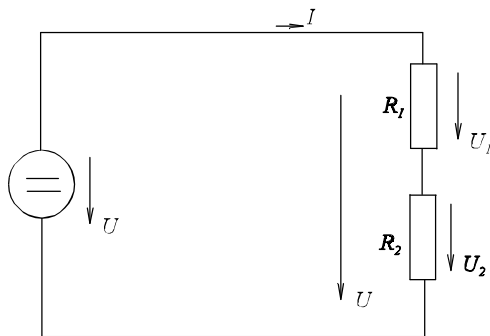


Bild EG251A: Einfacher Spannungsteiler

Ziel: Es soll versucht werden, die Spannungen in einer Reihenschaltung nach Bild EG251A direkt (ohne den Umweg über die Stromberechnung) zu bestimmen. Dazu die folgende Herleitung:

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2$$

$$I = \frac{U}{R_{\text{ges}}}$$

$$U_1 = I \cdot R_1$$

$$U_2 = I \cdot R_2$$

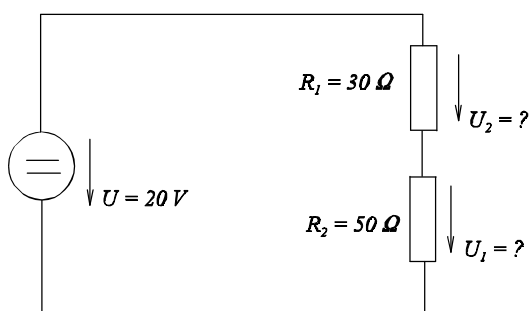
$$U_1 = U \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$U_2 = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$\frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$	$\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$	$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$
---	---	-------------------------------------

Die Spannungsteiler-Regel besagt, daß sich in einer Reihenschaltung die Spannungen proportional zu den Widerständen aufteilen.

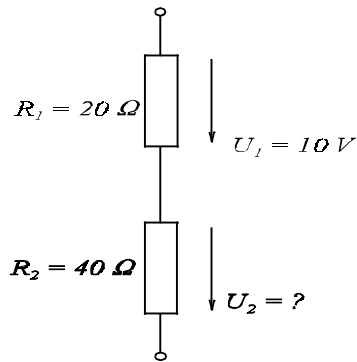
Beispiel 1:



$$U_1 = U \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 20 \text{ V} \cdot \frac{30 \Omega}{30 \Omega + 50 \Omega} = 7.5 \text{ V}$$

$$U_2 = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 20 \text{ V} \cdot \frac{50 \Omega}{30 \Omega + 50 \Omega} = 12.5 \text{ V}$$

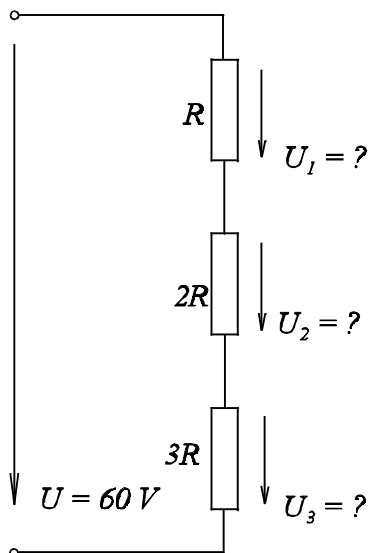
Bild EG251B

Beispiel 2:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$U_2 = U_1 \frac{R_2}{R_1} = 10 \text{ V} * \frac{40 \Omega}{20 \Omega} = 20 \text{ V}$$

Bild EG251C

Beispiel 3:

$$\frac{U_1}{U} = \frac{R}{R + 2R + 3R} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{U_2}{U} = \frac{2R}{R + 2R + 3R} = \frac{2}{6}$$

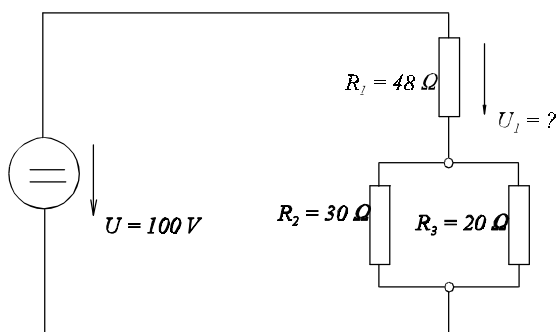
$$\frac{U_3}{U} = \frac{3R}{R + 2R + 3R} = \frac{3}{6}$$

$$U_1 = 10 \text{ V}$$

$$U_2 = 20 \text{ V}$$

$$U_3 = 30 \text{ V}$$

Bild EG251D

Beispiel 4:

$$\frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R_1 + \frac{R_2 * R_3}{R_2 + R_3}}$$

$$\frac{U_1}{U} = \frac{48 \Omega}{48 \Omega + \frac{30 \Omega * 20 \Omega}{30 \Omega + 20 \Omega}} = 0.8$$

$$U_1 = 0.8 * U = 80 \text{ V}$$

Bild EG251E

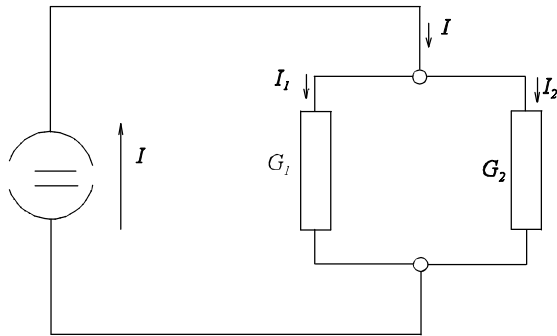
2.5.2. Stromteiler

Bild EG252A

Ziel: Es soll versucht werden, die Ströme in einer Parallelschaltung nach Bild EG252A direkt (ohne den Umweg über die Spannungsberechnung) zu ermitteln. Dazu die folgende Herleitung:

$$I_1 = U \cdot G_1$$

$$I_2 = U \cdot G_2$$

$$I = U \cdot G$$

$$G = G_1 + G_2$$

$\frac{I_1}{I_2} = \frac{G_1}{G_2}$	$\frac{I_1}{I} = \frac{G_1}{G} = \frac{G_1}{G_1 + G_2}$	$\frac{I_2}{I} = \frac{G_2}{G} = \frac{G_2}{G_1 + G_2}$
-------------------------------------	---	---

Die Ströme teilen sich im Verhältnis der Leitwerte auf.

Werden die Leitwerte durch Widerstände ersetzt, erhält man:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_2}} = \frac{R_2}{R_1}$$

oder

$$\frac{I_1}{I} = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$\frac{I_1}{I} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$	$\frac{I_2}{I} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$	$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$
---	---	-------------------------------------

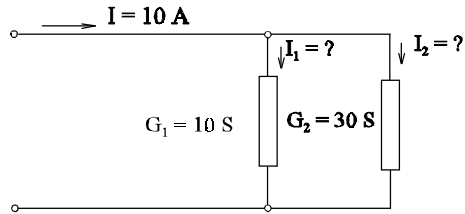
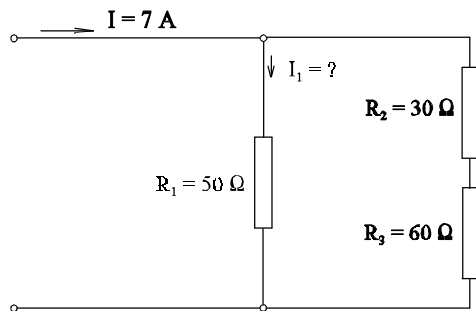
Beispiel 1:

Bild EG252B

$$\frac{I_1}{I} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \quad \Rightarrow \quad I_1 = 10\text{ A} \frac{10\text{ S}}{10\text{ S} + 30\text{ S}} = 2.5\text{ A}$$

$$\frac{I_2}{I} = \frac{G_2}{G_1 + G_2} \quad \Rightarrow \quad I_2 = 10\text{ A} \frac{30\text{ S}}{10\text{ S} + 30\text{ S}} = 7.5\text{ A}$$

Beispiel 2:

$$\frac{I_1}{I} = \frac{G_1}{G_1 + G_{23}} = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2 + R_3}}$$

$$I_1 = 7\text{ A} * \frac{\frac{1}{50\ \Omega}}{\frac{1}{50\ \Omega} + \frac{1}{30\ \Omega + 60\ \Omega}} = 4.5\text{ A}$$

Bild EG252C

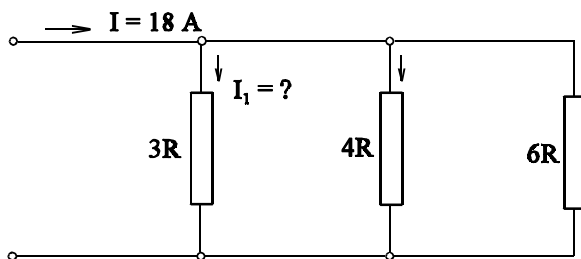
Beispiel 3:

Bild EG252D

$$\frac{I_1}{I} = \frac{\frac{1}{3R}}{\frac{1}{3R} + \frac{1}{4R} + \frac{1}{6R}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{4}{9}$$

$$I_1 = \frac{4}{9} * 18\text{ A} = 8\text{ A}$$

2.5.3. Potentiometer als Spannungsteiler

2.5.3.1. Unbelastetes Potentiometer

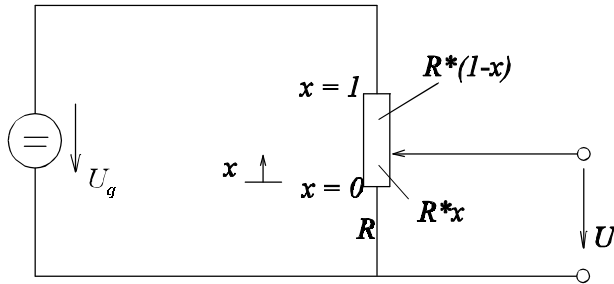


Bild EG2531A

Beim linearen Potentiometer nach Bild EG2531A wird die Schleiferstellung x eingeführt. Das Potentiometer hat den Widerstandswert R . Mit Hilfe der Schleiferstellung lässt sich der Widerstand R aufteilen, in $R*x$ und in $R*(1-x)$, siehe Bild EG2531A.

Nach den Spannungsteiler-Prinzip kann die Spannung U berechnet werden.

$$\frac{U}{U_q} = \frac{R*x}{R*x + R*(1-x)} = \frac{R*x}{R*x + R - R*x} = \frac{R*x}{R} = x$$

Das Spannungsverhältnis von Eingangs- zu Ausgangsspannung ist beim unbelasteten Potentiometer gleich der Schleiferstellung x .

2.5.3.2. Belastetes Potentiometer

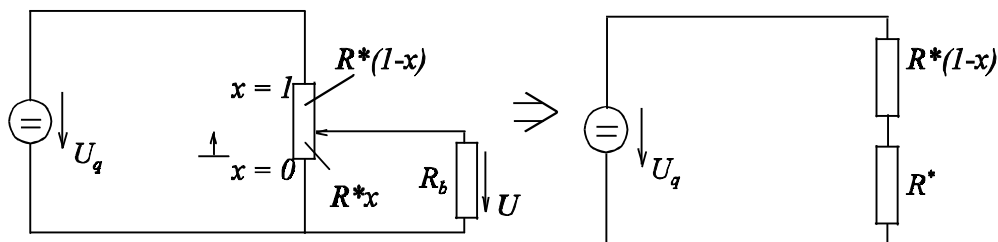


Bild EG2532A

Wird das Potentiometer belastet, ergibt sich das ESB nach Bild EG2532A. Die Widerstände $R*x$ und R_b können als Parallelwiderstand zusammengefasst werden:

$$R^* = \frac{R*x*R_b}{R*x + R_b}$$

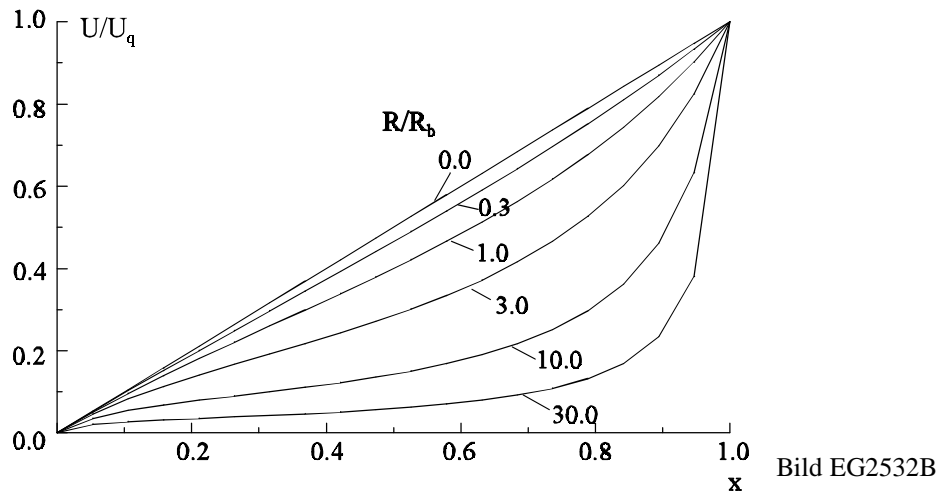
Das Verhältnis von U/U_q ergibt sich als Spannungsteiler der Widerstände $(1-x)*R$ und R^* .

$$\frac{U}{U_q} = \frac{R^*}{(1-x)*R + R^*} = \frac{\frac{R*x*R_b}{R*x + R_b}}{(1-x)*R + \frac{R*x*R_b}{R*x + R_b}} = \frac{R*x*R_b}{(1-x)*R*(R*x + R_b) + R*x*R_b}$$

$$\frac{U}{U_q} = \frac{x*R_b}{R*x - R*x^2 + R_b - x*R_b + x*R_b} = \frac{x}{x*(1-x)\frac{R}{R_b} + 1}$$

Die obere Funktion ist nun nicht mehr linear von der Schleifenstellung x abhängig. Die lineare x -Abhängigkeit wird durch ein Polynom in x dividiert. Nur wenn der Wert von R gegen Null geht (oder $R_b \rightarrow \infty$) ist eine fast lineare Abhängigkeit vorhanden. Bei großen Werten von R/R_b ergibt sich eine starke Nichtlinearität, siehe auch Bild EG2532B.

Um eine lineare Abhängigkeit beim Potentiometer zu erhalten, muß der Potentiometer-Widerstand wesentlich kleiner sein als der Belastungswiderstand.



Will man die maximale Abweichung von der Linearität feststellen, muß der obere Ausdruck mathematisch ausgewertet werden. Dieses führt auf eine Gleichung 3. Grades, die analytisch schwer lösbar ist. Für den Praktiker reicht, die Abweichung bei $x = 0.7$ auszuwerten. Dieses ist eine erhebliche Verringerung des mathematischen Aufwandes.

Aufgabe 2.5.7

Ein Potentiometer mit dem Widerstand von $R = 5 \text{ k}\Omega$ soll bei einer Schleifenstellung von $x = 0.7$ eine Abweichung von höchstens 0.1 % bezogen auf den Endwert aufweisen. Wie groß ist der Belastungswiderstand R_b zu wählen?

gegeben: Potentiometer: $R = 5 \text{ k}\Omega$
 Abweichung: bei $x = 0.7$ 0.1 % Abweichung bezogen auf den Endwert

gesucht: R_b

$$0.1 \% \triangleq 0.001 = x - \frac{U}{U_q} = x - \frac{x}{x \cdot (1-x) \frac{R}{R_b} + 1} \qquad 0.001 = 0.7 - \frac{0.7}{0.7 \cdot (1-0.7) \frac{R}{R_b} + 1}$$

$$\frac{0.7}{0.21 \frac{R}{R_b} + 1} = 0.699 \qquad \frac{0.7}{0.699} = 1 + 0.21 \frac{R}{R_b}$$

$$\frac{R}{R_b} = \frac{1}{0.21} \left(\frac{0.7}{0.699} - 1 \right)$$

$$R_b = R \frac{0.21}{\frac{0.7}{0.699} - 1} = 5 \text{ k}\Omega \frac{0.21}{\frac{0.7}{0.699} - 1} = 734 \text{ k}\Omega$$

- Damit die Abweichung von der Linearität kleiner ist als 0.1 %, muß der Lastwiderstand des Potentiometers größer sein als 734 kΩ.
- Die Berechnung von $0.7/0.69$ auf 4 Stellen Genauigkeit und anschließender Subtraktion von 1 führt

wegen der Differenzenbildung fast gleich großer Zahlen zu einem größeren Fehler.

2.6. Strom- Spannungs- und Widerstandsmessungen

Hier sollen nicht die modernen Multimeter mit Digitalanzeige behandelt werden. Dazu fehlen im Moment noch die elektronischen Grundlagen. Die alten Zeigermeßgeräte werden hier kurz erläutert.

2.6.1. Strom-Messung

2.6.1.1. Prinzip und ESB

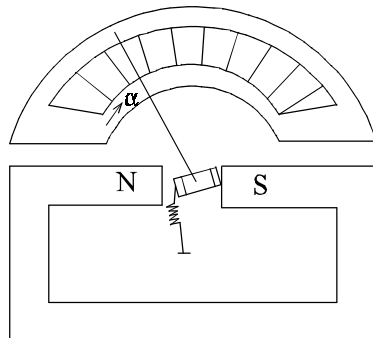


Bild EG2611A

Das Prinzip der Zeigermeßgeräte ist aus Bild EG2611A zu erkennen. Ein Strom verursacht eine Kraftwirkung. Diese Kraft wirkt auf drehbar gelagerte Teile. Mit Hilfe einer linearen Feder wird die Kraft in einen proportionalen Zeigerausschlag umgesetzt. Die Skala kann in Werten einer physikalischen Größe geeicht oder kalibriert werden.

Im dritten Semester wird gezeigt, daß ein stromdurchflossener Leiter im Magnetfeld eine Kraftwirkung erfährt, die proportional zum Strom ist. Wird nun eine Spule drehbar in einem Magnetfeld befestigt, ergibt sich ein Drehmoment proportional zum Strom. Dieses Drehmoment wird mit Hilfe einer linearen Feder in einen Zeigerausschlag α umgesetzt, der proportional zum Strom ist. Man spricht von **Drehspul-Meßgeräten**, die eine lineare Skala aufweisen. Wird das Meßgerät mit einer Frequenz beaufschlagt, so daß die Mechanik nicht mehr folgen kann, zeigt das Meßgerät einen Mittelwert an. Bildet man den Mittelwert über eine Periode, zeigt das Drehspul-Meßgerät den arithmetischen Mittelwert an, siehe Kap. 6.4.1. Weil der arithmetische Mittelwert negativ werden kann, ist ein Zeigerausschlag in zwei Richtungen möglich.

$$\alpha \sim I \quad \text{Drehspul-Meßgeräte}$$

Ein anderes Prinzip weisen die **Dreheisen-Meßgeräte** auf: Ein vom Strom durchflossene Spule erzeugt ein Magnetfeld. Zwei parallele Eisenteile im Magnetfeld stoßen sich gegenseitig ab. Die Kraft wird in einen Zeigerausschlag umgesetzt. Die Kraft ist proportional dem Magnetfeld zum Quadrat (3.Semester). Da das Magnetfeld proportional zum Strom ist, ist der Zeigerausschlag quadratisch zum Strom proportional. Deshalb ist auch die Skalaeinteilung nichtlinear. Durch die geometrische Form der gegenüberliegenden Eisenteile kann die Skala noch beeinflusst werden. Bildet man den Mittelwert über eine Periode, zeigt das Dreheisen-Meßgerät den quadratischen Mittelwert an, siehe Kap. 6.4.2. Der quadratische Mittelwert kann nur positiv werden, daher erfolgt der Zeigerausschlag nur in einer Richtung.

$$\alpha \sim I^2 \quad \text{Dreheisen-Meßgeräte}$$

Ersatzschaltbild (ESB)

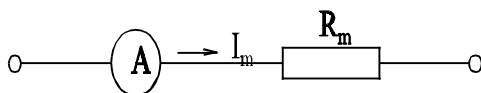


Bild EG2611B: ESB eines realen Strommessers

Das ESB eines realen Strommessers zeigt Bild EG2611B. Die Spule hat einen ohmschen Widerstand, der mit R_m bezeichnet wird. Das System sollte bei der Messung nicht großartig beeinflusst werden. Damit der Spannungsabfall eines Strommessers möglichst gering wird, muß der Innenwiderstand eines Strommessers möglichst klein

sein. Der Innenwiderstand des idealen Strommessers, siehe Bild EG2611B der linke Teil, ist Null.

Zusammenfassung:

Drehspulmeßgerät

$$\alpha \sim I$$

lineare Skala

arithmetischer Mittelwert

pos. und neg. Ausschlag

Dreheisenmeßgerät

$$\alpha \sim I^2$$

nichtlineare Skala

quadratischer Mittelwert

nur positiver Ausschlag

2.6.1.2. Meßbereichserweiterung

Verlangt: Anzeige: $I = I_m \cdot n$

n - Meßbereich-Erweiterungsfaktor

Was tun? Antwort: R_p zum Strommesser parallelschalten, siehe Bild EG2612A.

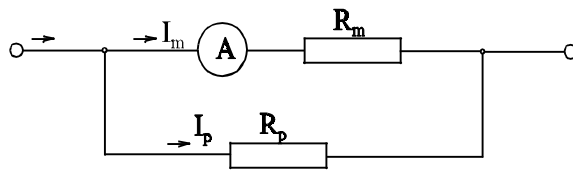


Bild EG2612A: ESB Meßbereichserweiterung des Strommessers

Nach der Stromteiler-Regel (Kap.2.5.2) und nach Bild EG2612A ergibt sich:

$$n = \frac{I}{I_m} = \frac{G_m + G_p}{G_m} = \frac{\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_p}}{\frac{1}{R_m}} = \frac{R_p + R_m}{R_p} = 1 + \frac{R_m}{R_p}$$

$$n - 1 = \frac{R_m}{R_p}$$

$$R_p = \frac{R_m}{n - 1}$$

2.6.2. Spannungs-Messung

2.6.2.1. Prinzip und ESB

Das Prinzip der Spannungs-Messung könnte das eines elektrostatischen Meßgerät sein, siehe Kap. 8 (2. Semester). Dieses ist aber nicht verbreitet. Der Ausweg ist das ohmsche Gesetz. Danach sind Strom und Spannung einander proportional. Die Strom-Messung wurde im letzten Abschnitt erklärt.

Die Messungen sollten möglichst wenig das Meßobjekt beeinflussen. Beim Spannungsmesser wird verlangt, daß dieser eine möglichst geringe Stromaufnahme hat. Dieses bedingt einen möglichst hohen Innenwiderstand beim Spannungsmesser

$$\begin{array}{ll} I_m \sim U_m & \text{damit Strommessung} \\ R_m & \text{möglichst groß} \end{array}$$

Da jede Spule einen temperaturabhängigen Widerstand aufweist, ist der Ausschlag temperaturabhängig.

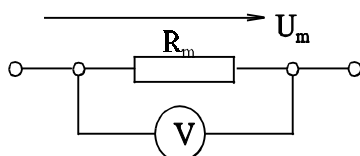


Bild EG2621A: ESB des realen Voltmeter

Das ESB eines Voltmeters nach Bild EG2621A besteht aus der Parallelschaltung eines idealen Voltmeters (Innenwiderstand ∞) und dem Innenwiderstand R_m des Meßgerätes.

2.6.2.2. Meßbereichserweiterung

Das Voltmeter nach Bild EG2622A wird durch einen Vorwiderstand R_v in Reihe erweitert.

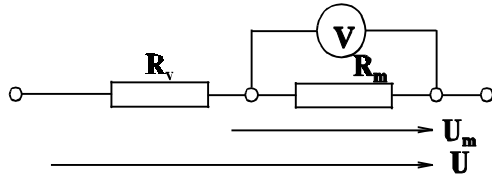


Bild EG2622A: ESB der Meßbereichserweiterung bei Spannungsmessern

Definition:

$$n = \frac{U}{U_m} = \text{Meßbereichserweiterungs-Faktor}$$

Nach der Spannungsteiler-Regel ergibt sich

$$n = \frac{U}{U_m} = \frac{R_v + R_m}{R_m} = 1 + \frac{R_v}{R_m}$$

$$R_v = (n-1)R_m$$

2.6.3. Widerstands-Messung

2.6.3.1. Ohmsches Gesetz

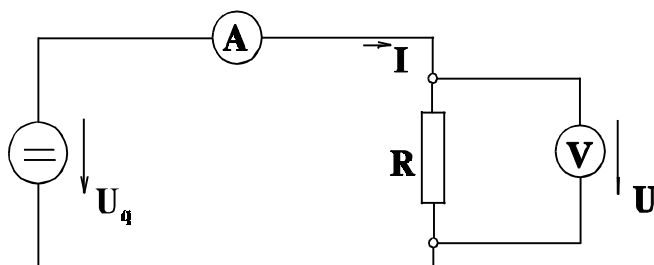


Bild EG2631A: Bestimmung von R durch U - und I -Messung

Mit Hilfe der Strom- und Spannungs-Messung nach Bild EG2631A und Hilfe des ohmschen Gesetzes kann der Widerstand auch bestimmt werden:

$$R = \frac{U}{I}$$

2.6.3.2. Direkt anzeigende Widerstands-Meßgeräte

In Multimetern sind häufig Widerstands-Messungen enthalten. Die Skala ist dabei nichtlinear. Bei Vollausschlag ist der Widerstand Null und in Ruhestellung der Widerstand unendlich (∞), siehe Bild EG2632A.

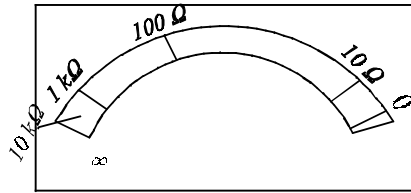


Bild EG2632A: Skala in Ohm calibriert

Wie ergibt sich die nichtlineare Skala. Was für eine physikalische Größe mißt das Meßgerät? Antwort: Der Zeigerausschlag ist proportional zum Strom. Wie groß der Strom ist, läßt sich aus dem Schaltbild eines direkt anzeigenden Ohmmeters nach Bild EG2632B ableiten.

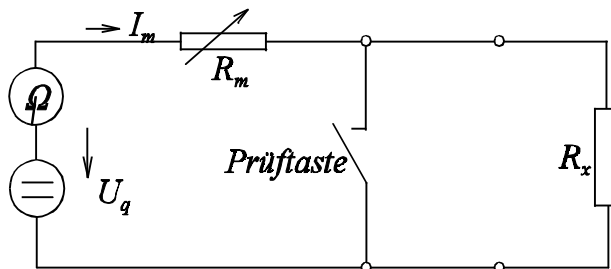


Bild EG2632B: Schaltbild eines direktanzeigenden Ohmmeters

Nach Bild EG2632B wird der Kurzschluß ($R_x=0$) durch das Betätigen der Prüftaste simuliert. Durch das Potentiometer R_m wird gerade Vollausschlag ($R=0$) eingestellt. Daraus ergibt sich ein Strom:

$$I_{\max} = \frac{U_q}{R_m}$$

Mit dem Widerstand R_x im Kreis läßt sich der Meßstrom

$$I_m = \frac{U_q}{R_m + R_x}$$

berechnen. Bei einem linearen Meßgerät (Drehspul-Meßgerät) ist der Ausschlag zum Strom I_m proportional. Mit $\alpha_{\max} = 1$ (Vollausschlag) läßt sich der Ausschlag

$$\frac{\alpha}{\alpha_{\max}} = \frac{\alpha}{1} = \frac{I_m}{I_{\max}} = \frac{\frac{U_q}{R_m + R_x}}{\frac{U_q}{R_m}} = \frac{R_m}{R_m + R_x}$$

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{R_x}{R_m}}$$

des Meßgerätes berechnen. Hat nun die Spannung U_q noch einen Einfluß auf das Meßergebnis? Beim ersten Hinsehen vermutet man: nein, weil U_q in der Formel für α nicht mehr enthalten ist. Bei näherem Hinsehen, entpuppt sich diese Methode allerdings als spannungsabhängig. Warum? Mit der Spannung U_q ändert sich auch der einzustellende Meßwiderstand R_m , damit bei Vollausschlag der dazu erforderliche Strom fließt. Dieses bewirkt eine Veränderung des Zeigerausschlags nach oberer Formel.

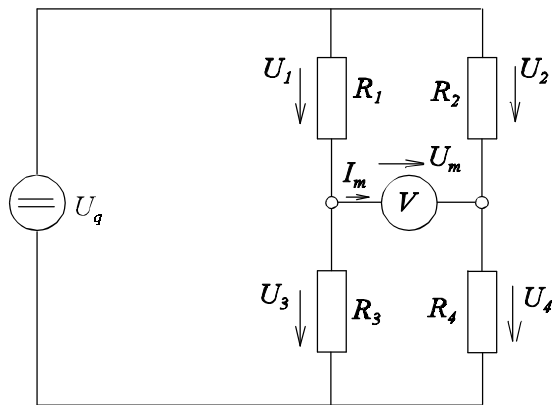
2.6.3.3. Widerstands-Meßbrücke**2.6.3.3.1. Prinzip**

Bild EG26331A: Prinzip der Meßbrücke

Bild EG26331A zeigt das Prinzip der Widerstands-Meßbrücke. Man kommt mit nur einem Voltmeter aus. Allerdings wird ein veränderlicher Widerstand benötigt.

Prinzip der Brücke: Die Spannung in der Brücke am Voltmeter U_m wird durch Abgleich zu Null.

Wenn die Spannung U_m zu Null wird, werden die Spannungen U_3 und U_4 sowie die Spannungen U_1 und U_2 gleich, welches durch Maschenumlauf leicht zu beweisen ist (Richtung rechtsrum):

$$U_2 - U_m - U_1 = 0 \quad \text{und} \quad U_m = 0 \quad \Rightarrow \quad U_1 = U_2$$

$$U_m + U_4 - U_3 = 0 \quad \text{und} \quad U_m = 0 \quad \Rightarrow \quad U_3 = U_4$$

Division oberer Gleichungen ergibt:

$$\frac{U_1}{U_3} = \frac{U_2}{U_4}$$

Nach der Spannungs-Teiler-Regel verhalten sich die Spannungen bei $I_m = 0$ entsprechend der Widerstände:

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}$$

oder umgeformt

$$R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3$$

Die Numerierung der Brückenelemente kann auch in einer anderen Reihenfolge erfolgen. Merken muß man sich folgendes:

Bei einer abgeglichenen Brücke ($U_m=0$) ist das Produkt der gegenüberliegenden Widerstände gleich.

Einfluß von U_q

Wie groß ist der Einfluß der Spannung U_q ? Da kein Absolutwert der Spannung gemessen wird, ist auch die absolute Größe von U_q nicht so entscheidend. Nur wenn U_q sehr gering wird, ist die Empfindlichkeit beim Nullabgleich geringer.

2.6.3.3.2. Messung mit dekadischen Normal-Widerständen

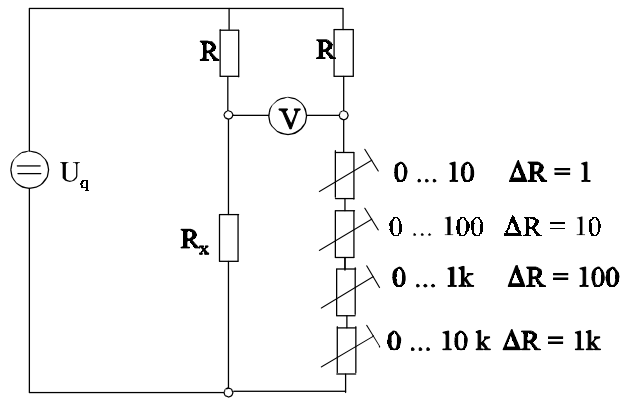


Bild EG26332A

In einem Zweig wird eine Widerstandsdekade nach Bild EG26332A geschaltet. Die stufenweise verstellbaren Widerstände können sich alle vier in einen Gehäuse befinden. Bei Nullabgleich kann der Widerstandswert R_x an der Dekade direkt abgelesen werden.

2.6.3.3.3. Messung mit Potentiometer

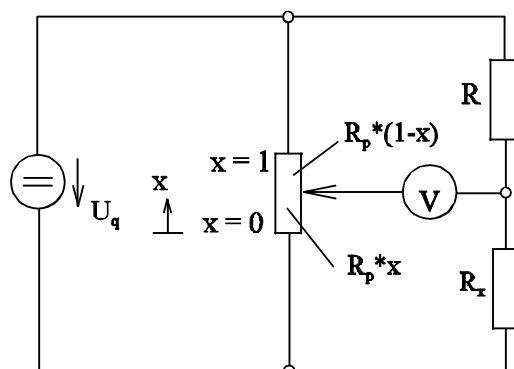


Bild EG26333A

Nach Bild EG26333A wird ein Potentiometer in einem Längszweig einer Brücke geschaltet. Mit Hilfe der Schleiferstellung x ergeben sich die Widerstände (siehe Kap. 2.5.3)

$$R_p \cdot (1-x)$$

$$R_p \cdot x$$

Die Produkte der gegenüberliegenden Widerstände ergeben:

$$R_p \cdot (1-x) \cdot R_x = R \cdot R_p \cdot x$$

Auflösung nach R_x :

$$R_x = R \frac{x}{1-x}$$

Die Meßbereichsumschaltung ist durch Umschaltung von R möglich. Die Skala des Potentiometers kann in Ohm calibriert oder geeicht werden.

2.7. Ersatz-Quellen

2.7.1. Ersatz-Spannungs-Quelle

2.7.1.1. Ersatzschaltbild

Eine Batterie und jede andere Spannungs-Quelle weist (im Normalfall) mit zunehmender Belastung eine Spannungs-Verringerung an den Klemmen auf. Die Ursache ist der Innenwiderstand R_i der Quelle. Das ESB der realen Spannungs-Quelle besteht also aus der Reihenschaltung einer idealen Quelle der Spannung U_q und dem Innenwiderstand R_i , siehe Bild EG2711A.

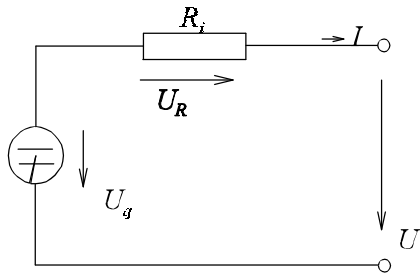


Bild EG2711A: ESB der realen Spannungs-Quelle

2.7.1.2. Kennlinie der Quelle

Ein Maschenumlauf nach Bild EG2711A ergibt:

$$\begin{aligned} U_q &= U_R + U \\ U_q &= I \cdot R_i + U \\ U &= U_q - I \cdot R_i \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad U = f(I)$$

Die obere Formel gibt die Klemmenspannung U in Abhängigkeit der Belastung I an. Dieses ist eine lineare Abhängigkeit, also eine Gerade. Eine Gerade ist entweder gegeben durch:

- einen Punkt und der Steigung oder
- durch zwei Punkte

1. Möglichkeit: (1 Punkt plus Steigung)

Ein Punkt der Geraden ist die Belastung Null. Bei $I = 0$ ist die Klemmenspannung gleich der Quellspannung ($U = U_q$, $I = 0$). Die Steigung der Geraden

$$\frac{dU}{dI} = \frac{\Delta U}{\Delta I} = -R_i$$

ist der Wert des negativen Innenwiderstandes. Somit kann die Gerade gezeichnet werden, siehe Bild EG2712A.

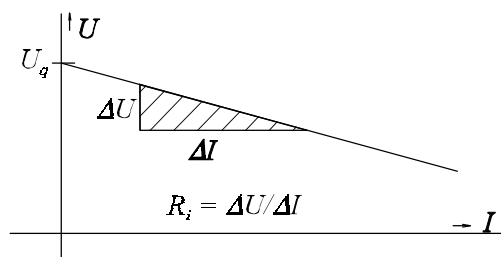


Bild EG2712A: Kennlinie der Spannungsquelle, konstruiert mit der Steigung und einem Punkt

2. Möglichkeit: (zwei Punkte)

Eine Gerade ist durch zwei Punkte gegeben. Erster Punkt wie oben:

$$U = U_q, I = 0$$

Der zweite Punkt ist beliebig wählbar. Dieser kann z.B. bei Nennstrom gewählt werden. Ein weiterer markanter Punkt ist der Kurzschluß-Punkt. Wird die Quelle kurzgeschlossen fließt der Strom

$$I_k = \frac{U_q}{R_i}$$

Und an der Quelle liegt die Spannung

$$U = 0$$

Auch der zweite Punkt

$$I = \frac{U_q}{R_i}, U = 0$$

wird in ein Diagramm eingetragen, siehe Bild EG2712B:

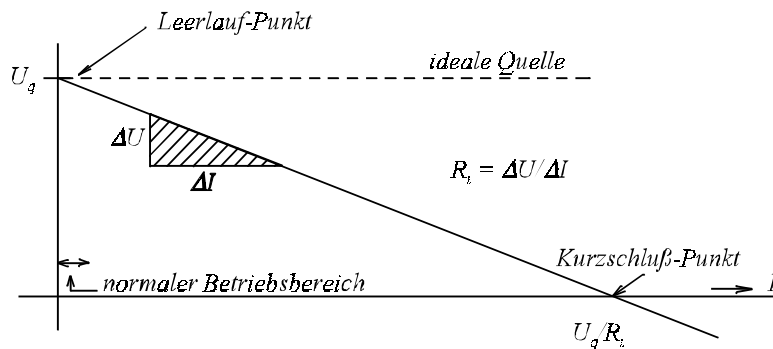


Bild EG2712B: Kennlinie der Spannungsquelle, konstruiert mit Leerlauf- und Kurzschluß-Punkt

2.7.1.3. Grafische U-Bestimmung

Wird ein Widerstand an die Spannungs-Quelle angeschlossen, stellt sich eine Spannung U an den Klemmen ein, siehe Bild EG2713A.

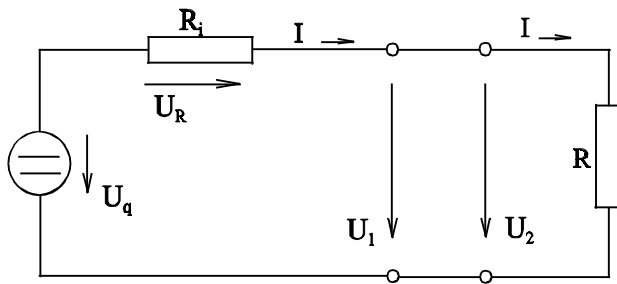


Bild EG2713A

Die linke Seite nach Bild EG2713A hat die Kennlinie

$$U = U_q - I \cdot R_i$$

Die rechte Seite ist das ohmsche Gesetz mit der Kennlinie

$$U = R \cdot I$$

Analytisches Gleichsetzen der Spannungen U ergibt eine Gleichung für den Strom I :

$$U_1 = U_2 \Rightarrow U_q - I \cdot R_i = R \cdot I \Rightarrow I = \frac{U_q}{R + R_i}$$

Die Möglichkeit die Spannungen U beider Ausdrücke grafisch gleich zu setzen, ist anschaulicher. Zeichnet man beide oberen Kennlinien in ein Diagramm, ergibt sich ein Schnittpunkt. Dieser wird Arbeitspunkt genannt, siehe Bild EG2713B.

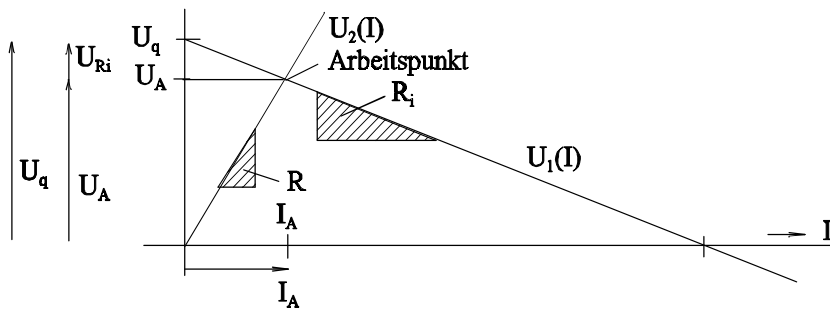


Bild EG2713B: Grafische Bestimmung von elektrischen Größen einer belasteten Spannungsquelle

Nicht nur die Klemmen-Spannung, sondern auch andere elektrische Größen können grafisch bestimmt werden, siehe Bild EG2713B.

Oberes Verfahren ist für lineare Netzwerke nicht ganz so wichtig. Größere Bedeutung haben die grafischen Verfahren bei nichtlinearen Netzwerken (z.B. Diodenkennlinie), siehe Abschnitt 5.2.

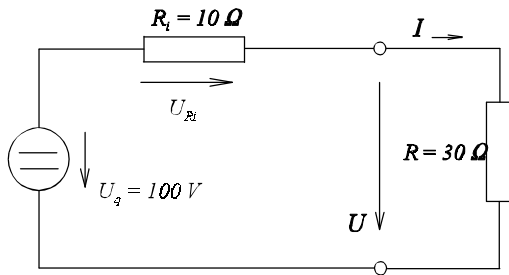
Beispiel:**gegeben:**

Bild EG2713C

gesucht:I, U, U_{Ri}

Methode:

a) grafisch 10 V \triangleq 1 cm 1 A \triangleq 1 cm

b) analytisch

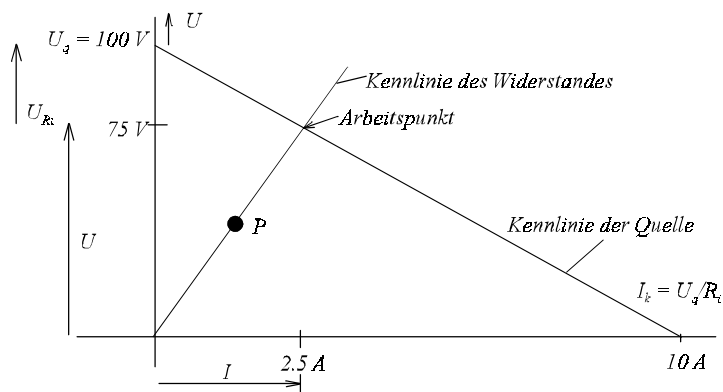
Lösung a) grafisch● Ein Punkt P \Rightarrow 2 A, 30 Ω, 60 V

Bild EG2713D: Lösung des Beispiels

Aus Bild EG2713D kann abgelesen werden:

$I = 2.5 \text{ A}$

$U = 75 \text{ V}$

$U_{Ri} = 25 \text{ V}$

Lösung b) analytisch

Nach der Spannungsteiler-Regel ergibt sich:

$$\frac{U}{U_q} = \frac{R}{R_i + R} = \frac{30 \Omega}{10 \Omega + 30 \Omega} = 0.75$$

$$U = 0.75 \cdot U_q = 0.75 \cdot 100 \text{ V} = 75 \text{ V}$$

2.7.2. Ersatz-Strom-Quelle

2.7.2.1. ESB

Das Verständnis der physikalischen Anschauung der Strom-Quelle ist schwieriger als das der Spannungs-Quelle. Eine technische Strom-Quelle ist mit Verstärkern (z.B. Transistoren oder Operationsverstärkern) realisierbar. Das ESB einer Strom-Quelle zeigt Bild EG2721A.

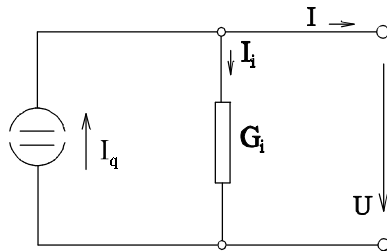


Bild EG2721A: ESB einer realen Strom-Quelle

Das ESB einer Strom-Quelle besteht aus der idealen Strom-Quelle mit dem konstanten Wert I_q . Der Innenwiderstand wird als Leitwert G_i , nicht in Reihe, sondern parallel angegeben. Die Strom-Quelle wird (zur Unterscheidung mit der Spannungs-Quelle) mit zwei offenen Halbkreisen dargestellt.

2.7.2.2. Kennlinie

Aus Bild EG2721A ergibt sich aus der Knotensumme:

$$I_q = I_i + I$$

$$I_i = U \cdot G_i$$

$$I_q = U \cdot G_i + I$$

$$I = I_q - U \cdot G_i$$

Obere Kennlinie der Strom-Quelle sieht wieder nach einer Geradengleichung aus. Bestimmung in diesem Fall durch zwei Punkte

$$U = 0 \quad (\text{Kurzschluß}) \quad \Rightarrow \quad I = I_q \quad I_i = 0$$

$$I = 0 \quad (\text{Leerlauf}) \quad \Rightarrow \quad U = I_q / G_i \quad I_i = I_q$$

Beide Punkte in ein Diagramm eingetragen und zur Geraden verbunden ergibt Bild EG2722A.

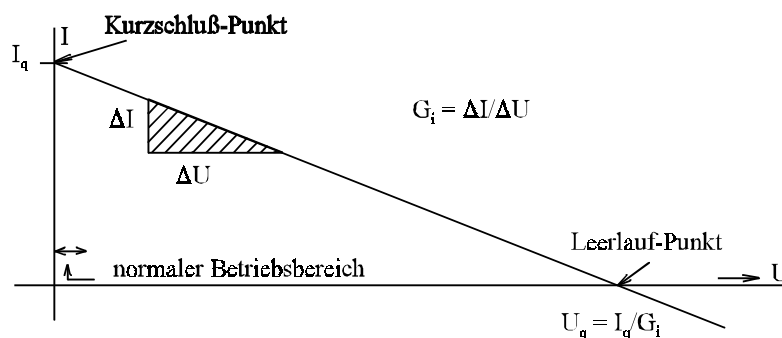


Bild EG2722A: Kennlinie der Strom-Quelle

2.7.2.3. Belastete Strom-Quelle

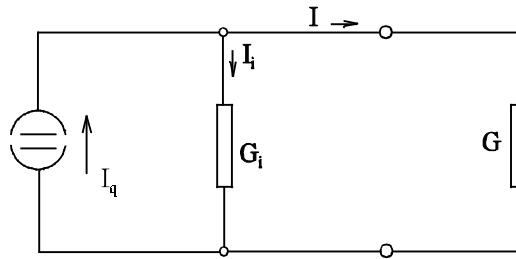


Bild EG2723A

Bei der Spannungs-Quelle war der größte Spannungsabfall an der Last. Bei der Strom-Quelle soll im normalen Betriebsbereich der größte Stromanteil von I_q sich auf die Last G aufteilen. Da die Ströme entsprechend der Leitwerte sich aufteilen, wird verlangt, daß G sehr viel größer ist als der Innenteilwert G_i .

Der Innenleitwert der Strom-Quelle soll sehr viel kleiner sein als die Leitwerte der Last. Beim Kehrwert Widerstand ist das Verhältnis umgekehrt: Der Innenwiderstand einer Strom-Quelle soll sehr viel größer sein als der Widerstand der Last.

Eine theoretische Realisierbarkeit einer Stromquelle: Eine Spannungs-Quelle mit hoher Spannung und hohem Innenwiderstand wirkt als Strom-Quelle. Dieses wird aber praktisch nach dieser Art kaum verwirklicht.

2.7.3. Umrechnung zwischen Ersatz- Strom- und Spannungs-Quelle

Aus dem Vergleich der Bilder EG2712B und EG2722A ergeben sich gewisse Gemeinsamkeiten zwischen Ersatz-Strom- und Ersatz-Spannungs-Quelle: Beides sind Geraden mit positiven Funktionswerte bei Null und mit negativer Steigung. Die Steigung ist jeweils der Innenwiderstand bzw. Innenleitwert. Durch Vertauschen der Achsen von U und I bei einer der Kennlinien, könnten beide Kennlinien identisch sein, siehe Bild EG273A.

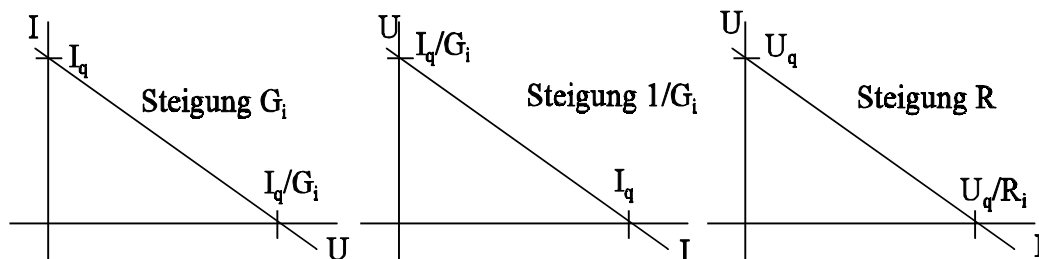


Bild EG273A: a) bekannte Kennlinie der Stromquelle
b) achsenvertauschte Kennlinie der Stromquelle
c) Kennlinie der Spannungsquelle

Nur die Parameter der Quellen müssen einander angepaßt werden. Der Unterschied in den Kennlinien ist der normale Betriebsbereich. Mathematisch aber sind die Kennlinien gleich. Daraus ergibt sich, daß es möglich ist, die eine Form in die andere umzurechnen. Dazu werden beide Kennlinien miteinander verglichen:

Spannungs-Quelle

Strom-Quelle

$$U = U_q - R_i \cdot I$$

$$I = I_q - G_i \cdot U$$

$$U = \frac{I_q}{G_i} - \frac{I}{G_i}$$

Damit beide Kennlinien gleich sind, müssen sowohl der konstante Anteil, sowie auch der lineare Anteil gleich sein:

$$U_q = \frac{I_q}{G_i}$$

$$R_i \cdot I = \frac{I}{G_i} \quad \Rightarrow \quad R_i = \frac{1}{G_i}$$

Damit folgt als Ergebnis der Umwandlung von einer Strom- in eine Spannungs-Quelle und umgekehrt:

Der Innenwiderstand von Strom- und Spannungs-Quelle ist gleich. Leerlaufspannung und Kurzschlußstrom lassen sich mit Hilfe des ohmschen Gesetzes an R_i berechnen:

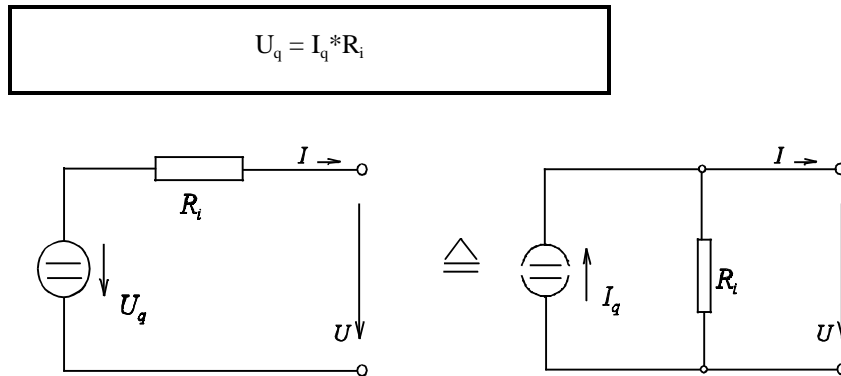


Bild EG273B

$$U_q = R_i \cdot I_q$$

Übung Studenten:

Aufgabe 2.7.1 (ohne Unterlagen)

Rechnen Sie die folgenden Spannungsquellen in äquivalente Stromquellen um:

- a) $U_q = 80 \text{ V}$ $R_i = 20 \text{ } \Omega$
 b) $U_q = 120 \text{ V}$ $R_i = 50 \text{ } \Omega$

Aufgabe 2.7.2 (ohne Unterlagen)

Rechnen Sie die folgenden Stromquellen in äquivalente Spannungsquellen um:

- a) $I_q = 4 \text{ A}$ $G_i = 0.2 \text{ S}$
 b) $I_q = 30 \text{ A}$ $G_i = 20 \text{ S}$

2.7.4. Geregeltes Netzteil

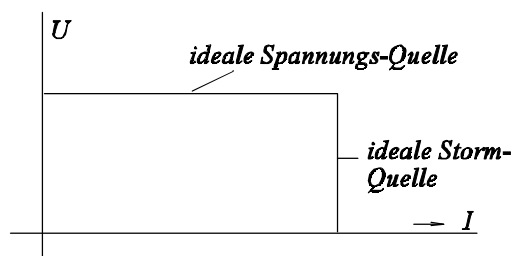


Bild EG274

Die Kennlinie eines geregelten Netztes zeigt Bild EG274A. Je nach Last wird entweder die Spannung konstant gehalten oder der Strom.

Aufgrund der Regelung ist die Steigung (z.B. der Spannungs-Quelle fast Null) die einer idealen Quelle. Je nach Last kann mit einer idealen Spannungs- oder Strom-Quelle gerechnet werden.

3. Berechnung linearer Gleichstrom-Netze

3.1. Einleitung

3.1.1. Allgemeines

Bislang wurden Stromkreise mit nur einer Spannungsquelle untersucht. Sind mehrere Spannungsquellen und mehrere Maschen im Netzwerk enthalten, wird die Berechnung etwas komplizierter. Sind nur normale lineare Widerstände im Netzwerk enthalten, ist die Aufgabe vorhanden ein lineares elektrisches Gleichstrom-Netz zu berechnen. Im Rahmen dieses Kapitels werden verschiedene Berechnungs-Methoden vorgestellt. Die meisten Methoden sollen anhand des Beispiel-Netzwerkes nach Bild EG31A erläutert werden.

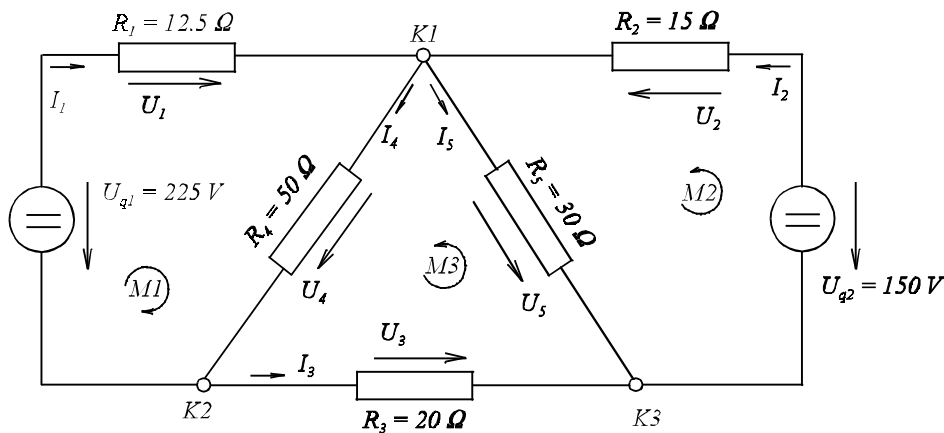


Bild EG31A: Beispiel-Netzwerk

Das Problem nach Bild EG31A ist, die unbekannten Ströme

I_1 bis I_5

und die unbekannten Spannungen

U_1 bis U_5

zu berechnen. In diesem Kapitel 3 werden verschiedene Methoden zur Berechnung linearer Netzwerke vorgestellt. Diese Methoden kann man grob einteilen in:

- Aufstellen von linearen Gleichungssystemen für die gesuchten Größen (3 Verfahren)
- Netz-Umformungen: Ähnlich der Methode Ersatzwiderstand, gibt es noch mehrere Methoden, die sich auch ergänzen; hier müssen dann teilweise mehrere Methoden nacheinander angewandt werden.

3.1.2. Begriffe

Ein elektrisches Netzwerk besteht aus mehreren Zweigen, die verschiedene Maschen bilden. Am Ende der Zweige ist jeweils ein Knoten.

Knoten: Der Knoten ist die Verbindung von mindestens zwei, meistens aber mehr als zwei, Enden von Zweigen.

Zweig: Ein Zweig ist die Verbindung zwischen zwei Knoten. Der Zweig kann, muß aber nicht, auch Quellen (Strom, Spannung) enthalten.

Masche: Die Masche ist ein geschlossener Umlauf in einem Netzwerk.

Definition: z - Anzahl der Zweige
k - Anzahl der Knoten
m - Anzahl der Maschen

Achtung: Eine leitende Verbindung zwischen Knoten wird als ein Knoten gezählt, siehe Bild EG312A.

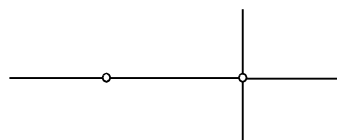


Bild EG312A: Ein Knoten auseinander gezogen

3.1.3. Normierung

Im Vorgriff auf die weiteren Unterkapitel, wo viel numerisches Rechnen erforderlich ist, soll eine Normierung durchgeführt werden. Bei physikalischen Größen-Gleichungen muß jeweils mit Zahlenwert und Einheit gerechnet werden. Da dieses der Computer nicht ohne weiteres kann, muß mit dimensionslosen Größen gerechnet werden. Dieses ist mit Hilfe von zugeschnittenen Größen-Gleichungen möglich. Die Normierung soll anhand des ohmschen Gesetzes erläutert werden:

$$U = R \cdot I$$

Die zugehörige Einheiten-Gleichung ist:

$$1V = 1\Omega \cdot 1A$$

Die Division beider oberen Gleichungen ergibt:

$$\frac{U}{1V} = \frac{R}{1\Omega} \cdot \frac{I}{1A}$$

Mit den Abkürzungen

$$U_{\text{Norm}} = 1V$$

$$I_{\text{Norm}} = 1A$$

$$R_{\text{Norm}} = 1\Omega$$

läßt sich die Einheiten-Gleichung schreiben als

$$U_{\text{Norm}} = I_{\text{Norm}} \cdot R_{\text{Norm}}$$

Die Division des ohmschen Gesetzes durch die normierte Einheitengleichung ergibt

$$\frac{U}{U_{\text{Norm}}} = \frac{R}{R_{\text{Norm}}} \cdot \frac{I}{I_{\text{Norm}}}$$

Mit der Abkürzung der normierten Größen

$$U^N = \frac{U}{U_{\text{Norm}}} \quad I^N = \frac{I}{I_{\text{Norm}}} \quad R^N = \frac{R}{R_{\text{Norm}}}$$

läßt sich das ohmsche Gesetz auch schreiben mit dimensionslosen Größen:

$$U^N = R^N \cdot I^N$$

$$[U^N] = [R^N] = [I^N] = 1$$

Es gibt verschiedene Schreibweisen für die normierte Größen und für den Normierungswert. Sternchen und Strich-Schreibweisen sind auch üblich. Index oder den Index hochschreiben findet man auch. Konvention hier:

normierte Größen (z.B. U^N) \Rightarrow Index "N" hoch $[U^N] = 1$

Normierungs-Wert (z.B. U_{Norm}) \Rightarrow Index "Norm" tief $[U_{\text{Norm}}] = V$

Es ist nicht erforderlich auf SI-Grundeinheiten zu normieren. Es kann auch dekadischen Vielfache oder aber auch auf "krumme" Vielfache der SI-Einheiten normiert werden, dazu zwei Beispiele.

Beispiel 1:

gegeben: $U_{\text{Norm}} = 1 \text{ kV}$, $I_{\text{Norm}} = 1 \text{ mA}$

gesucht: R_{Norm}

R_{Norm} ist im Prinzip noch frei wählbar, kann aber auch nach dem ohmschen Gesetz gewählt werden:

$$R_{\text{Norm}} = \frac{U_{\text{Norm}}}{I_{\text{Norm}}} = \frac{1 \text{ kV}}{1 \text{ mA}} = 10^6 \Omega = 1 \text{ M}\Omega \quad U_{\text{Norm}} = R_{\text{Norm}} * I_{\text{Norm}}$$

Das ohmsche Gesetz dividiert durch die obere Gleichung ergibt:

$$\frac{U}{U_{\text{Norm}}} = \frac{R}{R_{\text{Norm}}} * \frac{I}{I_{\text{Norm}}}$$

obere mit den normierten Größen

$$U^N = \frac{U}{U_{\text{Norm}}} \quad I^N = \frac{I}{I_{\text{Norm}}} \quad R^N = \frac{R}{R_{\text{Norm}}}$$

läßt sich schreiben:

$$U^N = R^N * I^N$$

Beispiel 2:

gegeben: $U_{\text{Norm}} = 100 \text{ V}$, $I_{\text{Norm}} = 5 \text{ A}$, $R_{\text{Norm}} = 10 \Omega$

gesucht: normiertes ohmsches Gesetz

Wenn aus irgend einem Grund, z.B. schon alle Nenngößen (als Beispiel alle Nenngößen des ohmschen Gesetzes) vorgegeben sind, ist die Normierung auch möglich. Es muß nur ein Zusammenhang zwischen den Normierungs-Größen gefunden werden. Die Gleichung:

$$\frac{U_{\text{Norm}}}{I_{\text{Norm}} * R_{\text{Norm}}} = C \quad U_{\text{Norm}} = C * I_{\text{Norm}} * R_{\text{Norm}}$$

$$\frac{U_{\text{Norm}}}{I_{\text{Norm}} * R_{\text{Norm}}} = \frac{100 \text{ V}}{5 \text{ A} * 10 \Omega} = 2 \quad U_{\text{Norm}} = R_{\text{Norm}} * I_{\text{Norm}} * 2$$

Division des ohmschen Gesetzes durch die obere Gleichung ergibt:

$$\frac{U}{U_{\text{Norm}}} = \frac{R}{R_{\text{Norm}}} * \frac{I}{I_{\text{Norm}}} * \frac{1}{2}$$

$$U^N = \frac{U}{U_{\text{Norm}}} = \frac{U}{100 \text{ V}} \quad I^N = \frac{I}{I_{\text{Norm}}} = \frac{I}{5 \text{ A}} \quad R^N = \frac{R}{R_{\text{Norm}}} = \frac{R}{10 \Omega}$$

in diesen Fall das ohmsche Gesetz in normierter Form:

$$U^N = \frac{1}{2} * R^N * I^N$$

Aufgabe 3.1.5b (Studenten)**gegeben:** $U_{\text{Norm}} = 20 \text{ V}$, $I_{\text{Norm}} = 5 \text{ A}$, $R_{\text{Norm}} = 1 \Omega$ **gesucht:** normiertes ohmsches Gesetz**Lösung:**

$$U = I \cdot R$$

$$\frac{U_{\text{Norm}}}{I_{\text{Norm}} \cdot R_{\text{Norm}}} = 4 \quad U_{\text{Norm}} = R_{\text{Norm}} \cdot I_{\text{Norm}} \cdot 4$$

$$\frac{U}{U_{\text{Norm}}} = \frac{I}{I_{\text{Norm}}} \cdot \frac{R}{R_{\text{Norm}}} \cdot \frac{1}{4}$$

$$U^N = I^N \cdot R^N \cdot \frac{1}{4}$$

Aufgabe 3.1.6a (Studenten)**gegeben:** $U = 80 \text{ V}$ $R = 20 \Omega$ $U_{\text{Norm}} = 20 \text{ V}$, $I_{\text{Norm}} = 2 \text{ A}$, $R_{\text{Norm}} = 10 \Omega$ **gesucht:** I mit Hilfe normierter Berechnung**A] normierte Gleichung aufstellen**hier einfach, es gilt: $U_{\text{Norm}} = R_{\text{Norm}} \cdot I_{\text{Norm}}$ \Rightarrow $U^N = R^N \cdot I^N$ **B] Normierung**

$$U^N = \frac{U}{U_{\text{Norm}}} = \frac{80 \text{ V}}{20 \text{ V}} = 4 \quad R^N = \frac{R}{R_{\text{Norm}}} = \frac{20 \Omega}{10 \Omega} = 2$$

C] Berechnung

$$I^N = \frac{U^N}{R^N} = \frac{4}{2} = 2$$

D] Entnormierung

$$I = I_{\text{Norm}} \cdot I^N = 2 \text{ A} \cdot 2 = 4 \text{ A}$$

3.2. Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze

3.2.1. Methode

Zur Erläuterung der Methode soll das Beispiel-Netzwerk nach Bild EG311A betrachtet werden.

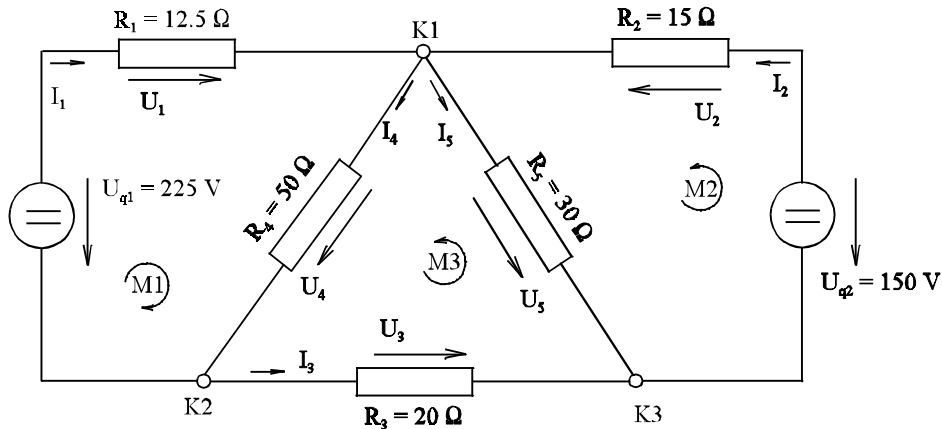


Bild EG311A: Beispiel-Netzwerk

- 1. Frage:** Wieviel unbekannte Größen sind zu berechnen?
- Antwort:** 5 unbekannte Ströme und 5 unbekannte Spannungen ergeben insgesamt 10 zu berechnende physikalische Größen.
- 2. Frage:** Wieviel Gleichungen sind zur Berechnung dieser 10 Größen notwendig?
- Antwort:** 10 Gleichungen.
- 3. Frage:** Woher erhält man die notwendigen 10 Gleichungen?
- Antwort:** Von den drei bekannten Gesetzen:
 - ohmsches Gesetz,
 - 1. Kirchhoffsches Gesetz (Stromsumme)
 - 2. Kirchhoffsches Gesetz (Maschenumlauf)

Auswertung des ohmschen Gesetzes:

Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung ergibt für das Beispiel-Netzwerk nach Bild EG311A fünf Gleichungen nach dem ohmschen Gesetz:

$$U_1 = I_1 \cdot R_1$$

$$U_2 = I_2 \cdot R_2$$

$$U_3 = I_3 \cdot R_3$$

$$U_4 = I_4 \cdot R_4$$

$$U_5 = I_5 \cdot R_5$$

Fazit: Das ohmsche Gesetz liefert 5 Gleichungen

Auswertung 1. Kirchhoffsches Gesetz:

Für das Beispiel-Netzwerk nach Bild EG311A ergeben sich drei Knotensummen für die Knoten K1 bis K3.

$$\text{K1:} \quad I_1 + I_2 - I_4 - I_5 = 0$$

$$\text{K2:} \quad -I_1 - I_3 + I_4 = 0$$

$$\text{K3:} \quad -I_2 + I_3 + I_5 = 0$$

Werden die letzten beiden Gleichungen (K2 und K3) addiert und umgeformt ergibt sich

$$-I_1 - I_3 + I_4 - I_2 + I_3 + I_5 = 0$$

$$-I_1 - I_2 + I_4 + I_5 = 0$$

$$I_1 + I_2 - I_4 - I_5 = 0$$

Damit erhält man durch Addition von zwei Gleichungen (K2, K3) eine schon bekannte Gleichung (K1).

Mathematisch ausgedrückt: Das Gleichungssystem, aufgestellt für alle Knoten, ist linear abhängig. Aus der Mathematik ist bekannt: Ein Gleichungssystem mit linear abhängigen Gleichungen ist nicht lösbar.

Physikalisch ist die lineare Abhängigkeit folgendermaßen zu erklären: Weil von außen kein Strom in das Netzwerk fließt, ist die Stromsumme im dritten Knoten schon festgelegt.

Fazit: Ein Netzwerk mit k Knoten hat k-1 unabhängige Knoten-Gleichungen.

Auswertung 2. Kirchhoffsches Gesetz:

Zur Berechnung des Beispiel-Netzwerkes werden 10 Gleichungen benötigt. Das Ohmsche Gesetz ergibt 5 Zusammenhänge. Aus der Knotensumme erhielt man 2 linear unabhängige Gleichungen. Bleiben $10 - 5 - 2 = 3$ Gleichungen mittels 2. Kirchhoffschen Gesetz (Maschenumlauf) zu bestimmen.

Für das Beispiel-Netzwerk nach Bild EG311A können die drei eingezeichneten Maschen M1 bis M3 durch Maschenumlauf ausgewertet werden:

$$\text{M1:} \quad U_1 + U_4 - U_{q1} = 0$$

$$\text{M2:} \quad U_2 + U_5 - U_{q2} = 0$$

$$\text{M3:} \quad U_3 + U_4 - U_5 = 0$$

Die oberen drei Gleichungen sind linear unabhängig. Es gibt allerdings noch die Möglichkeit diverse andere Maschen in das Beispiel-Netzwerk einzuzichnen. Z.B. ergibt ein Maschenumlauf ganz außen:

$$\text{MA:} \quad U_1 - U_2 + U_{q2} - U_3 - U_{q1} = 0$$

Ist die Gleichung MA nun zusammen mit den Gleichungen M1 bis M3 noch linear unabhängig? Antwort: nein. Beweis: Wird von M1 die Gleichung M2 subtrahiert und die Gleichung M3 addiert, ergibt sich die Gleichung MA.

Mathematisch ergibt sich die Anzahl der auszuwertenden Maschengleichungen zu:

$$m = 10 - 5 - 2 = 3 \quad (\text{Beispiel-Netzwerk})$$

$$m = 2z - z - (k-1) = z - (k-1) \quad (\text{allgemein})$$

Achtung: Zur Auswertung der Maschengleichungen muß jeder Zweig mindestens einmal in einer Masche vorhanden sein.

Zusammenfassung:

Bei einem linearen Netzwerk mit z Zweigen und k Knoten treten z unbekannte Ströme und auch z unbekannte Spannungen auf. Zur Bestimmung der insgesamt $2z$ Unbekannten sind auszuwerten:

- z mal Ohmsches Gesetz
- $(k-1)$ Knotengleichungen und
- $z-(k-1)$ Maschengleichungen

Werden bei einem linearen Netzwerk mit z Zweigen und k Knoten die unbekannten Spannungen über das Ohmsche Gesetz durch die unbekannten Ströme ersetzt, verringert sich die Anzahl der Unbekannten um die Hälfte auf nur z Variable. Dann sind auszuwerten:

- $(k-1)$ Knotengleichungen und
- $z-(k-1)$ Maschengleichungen

3.2.2. Berechnung des Beispiel-Netzwerkes**A] Gleichungssystem aufstellen**

Wieviele Gleichungen sind nun von welcher Art zu wählen? Antwort:

10 Unbekannte	=>	10 Gleichungen notwendig
ohmsches Gesetz	=>	5 Gleichungen
Knotensumme bleiben	=>	$3-1 = 2$ unabhängige Knoten-Gleichungen
	=>	3 Maschen-Gleichungen
Summe	=>	10 unabhängige Gleichungen

Daraus ergeben sich die 10 Gleichungen:

$$U_1 - R_1 \cdot I_1 = 0$$

$$U_2 - R_2 \cdot I_2 = 0$$

$$U_3 - R_3 \cdot I_3 = 0$$

$$U_4 - R_4 \cdot I_4 = 0$$

$$U_5 - R_5 \cdot I_5 = 0$$

$$-I_1 - I_3 + I_4 = 0$$

$$-I_2 + I_3 + I_5 = 0$$

$$U_1 + U_4 = U_{q1}$$

$$U_2 + U_5 = U_{q2}$$

$$U_3 + U_4 - U_5 = 0$$

Umgeformt in eine Matrix-Schreibweise:

U ₁	U ₂	U ₃	U ₄	U ₅	I ₁	I ₂	I ₃	I ₄	I ₅
1					-R ₁				
	1					-R ₂			
		1					-R ₃		
			1					-R ₄	
				1					-R ₅
					-1		-1	1	
						-1	1		1
1			1						
	1			1					
		1	1	-1					

$$* \begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{q1} \\ U_{q2} \\ 0 \end{matrix}$$

Das obere Gleichungssystem 10. Ordnung ist zu lösen. Zehn Variablen sind eine Menge. Werden die Spannungen durch Ströme ersetzt, halbiert sich die Anzahl der Variablen:

$$-I_1 - I_3 + I_4 = 0$$

$$-I_2 + I_3 + I_5 = 0$$

$$R_1 \cdot I_1 + R_4 \cdot I_4 = U_{q1}$$

$$R_2 \cdot I_2 + R_5 \cdot I_5 = U_{q2}$$

$$R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_4 - R_5 \cdot I_5 = 0$$

oder umgeformt in die Matrix-Schreibweise:

I ₁	I ₂	I ₃	I ₄	I ₅
-1	0	-1	1	0
0	-1	1	0	1
R ₁	0	0	R ₄	0
0	R ₂	0	0	R ₅
0	0	R ₃	R ₄	-R ₅

$$* \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ U_{q1} \\ U_{q2} \\ 0 \end{matrix}$$

B] Werte einsetzen

Einsetzen der Werte des Beispiel-Netzwerkes ergibt:

I ₁	I ₂	I ₃	I ₄	I ₅
-1		-1	1	
	-1	1		1
12.5Ω			50 Ω	
	15 Ω			30 Ω
		20 Ω	50 Ω	-30 Ω

$$* \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 225 \text{ V} \\ 150 \text{ V} \\ 0 \end{matrix}$$

Das obere Gleichungssystem kann in Kurzform mit Matrix und Vektoren geschrieben werden:

$$\bar{M} * \bar{I} = \bar{U}_q$$

Die Matrix \bar{M} wird dem Variablen-Vektor \bar{I} multipliziert und man erhält den Vektor der Quellspannungen \bar{U}_q .

Der Vektor \bar{I} ist zu bestimmen. Die Komponenten der Matrix und der Vektoren haben teilweise physikalische Einheiten. Die Komponenten des Stromvektors haben einheitlich die Maßeinheit "Ampere", während die Komponenten der Quellspannungen einheitlich die Maßeinheit "Volt" aufweisen. Die Komponenten der Matrix \bar{M} besitzen unterschiedliche Maßeinheiten, entweder "1" oder "Ohm".

C] Normierung

Um das obere Gleichungssystem numerisch zu lösen, wird eine Normierung auf SI-Einheiten durchgeführt:

$$U_{\text{Norm}} = 1 \text{ V}$$

$$I_{\text{Norm}} = 1 \text{ A}$$

$$R_{\text{Norm}} = 1 \Omega$$

Damit läßt sich oberes Gleichungssystem normiert angeben:

-1	0	-1	1	0	*	I_1^N	=	0
0	-1	1	0	1		I_2^N		0
12.5	0	0	50	0		I_3^N		225
0	15	0	0	30		I_4^N		150
0	0	20	50	-30		I_5^N		0

D] Numerische Berechnung

Das obere Gleichungssystem muß gelöst werden. Mehrere Methoden stehen zur Auswahl

- inverse Matrix
- Cramer Regel
- Gauß'scher Algorithmus
- Eingabe in den Rechner oder Taschenrechner

Im Rahmen dieser Vorlesung sollen alle oberen Methoden aus der Mathematik wiederholt werden. Falls mit Zahlen gerechnet wird, ist es ratsam, möglichst glatte kleine Zahlen zu benutzen. Jede einzelne Zeile des oberen Gleichungssystems kann beliebig multipliziert und dividiert werden. Die Zeilen des oberen Gleichungssystem werden dividiert durch folgende Werte:

Zeile 1 dividiert durch -1
 Zeile 2 dividiert durch -1
 Zeile 3 dividiert durch 12.5
 Zeile 4 dividiert durch 15
 Zeile 5 dividiert durch 10

1	0	1	-1	0	*	I_1^N	=	0
0	1	-1	0	-1		I_2^N		0
1	0	0	4	0		I_3^N		18
0	1	0	0	2		I_4^N		10
0	0	2	5	-3		I_5^N		0

Als erstes Verfahren soll der Gauß'sche Algorithmus wiederholt werden.

I_1^N	I_2^N	I_3^N	I_4^N	I_5^N		
1	0	1	-1	0	0	1
0	1	-1	0	-1	0	-1
1	0	0	4	0	18	23
-1	0	-1	1	0	0	-1
0	1	0	0	2	10	13
0	0	2	5	-3	0	4
	1	-1	0	-1	0	-1
	0	-1	5	0	18	22
	1	0	0	2	10	13
	-1	1	0	1	0	1
	0	2	5	-3	0	4
		-1	5	0	18	22
		1	-5	0	-18	-22
		1	0	3	10	14
		-1	5	0	18	22
		2	5	-3	0	4
		-2	10	0	36	44
			5	3	28	36
			1	0.6	5.6	7.2
			15	-3	36	48
			-15	-9	-84	-108
				-12	-48	-60
				1	4	5

$$I_5^N = 4$$

$$I_4^N = 5.6 - 0.6 \cdot I_5^N = 5.6 - 0.6 \cdot 4 = 3.2$$

$$I_3^N = -18 + 5 \cdot I_4^N = -18 + 5 \cdot 3.2 = -2$$

$$I_2^N = I_3^N + I_5^N = -2 + 4 = 2$$

$$I_1^N = -I_3^N + I_4^N = -(-2) + 3.2 = 5.2$$

E] Entnormierung

$$I = I^N \cdot I_{\text{Norm}}$$

Als Ergebnis erhält man, auch mit Hilfe des ohmschen Gesetzes:

$$I_1 = 5.2 \text{ A}$$

$$U_1 = 65 \text{ V}$$

$$I_2 = 2 \text{ A}$$

$$U_2 = 30 \text{ V}$$

$$I_3 = -2 \text{ A}$$

$$U_3 = -40 \text{ V}$$

$$I_4 = 3.2 \text{ A}$$

$$U_4 = 160 \text{ V}$$

$$I_5 = 4 \text{ A}$$

$$U_5 = 120 \text{ V}$$

Der Strom I_3 hat ein negatives Vorzeichen. Was bedeutet das negative Vorzeichen? Als erstes, wenn noch nicht vorgegeben, wählt man bei einem Netzwerk die Richtungen für jeden Zweig. Diese werden so gewählt, wie man die Stromrichtung erwartet. Ist bei komplizierteren Netzwerken die Richtung nicht auf den ersten Blick zu erkennen, muß eine angenommen werden. Stellt sich nachher ein negatives Vorzeichen ein, ist die angenommene Richtung gerade umgekehrt. Nicht noch mal rechnen! Man muß nur wissen, daß die tatsächliche Richtung entgegengesetzt zur angenommenen Richtung ist.

F] Probe

Bei allen physikalischen und mathematischen Berechnungen sollten die Berechnungen mit Hilfe einer Probe überprüft werden, wenn möglich. Bei der Lösung linearer Netzwerke (auch bei den später beschriebenen Methoden) gibt zwei Möglichkeiten der Probe:

- Lösung des Gleichungssystems überprüfen
- Bedingungen am Netzwerk überprüfen.

Die meisten Fehler werden bei der Lösung des Gleichungssystems gemacht. Die zugehörige Probe ist zwar ratsam, aber nicht ausreichend. Fehler bei der Aufstellung des Gleichungssystems können hier nicht erkannt werden. Besser ist es, die Probe am Netzwerk durchzuführen. Dazu werden die Ergebnisse in das Netzwerk eingetragen, siehe Bild EG3425A.

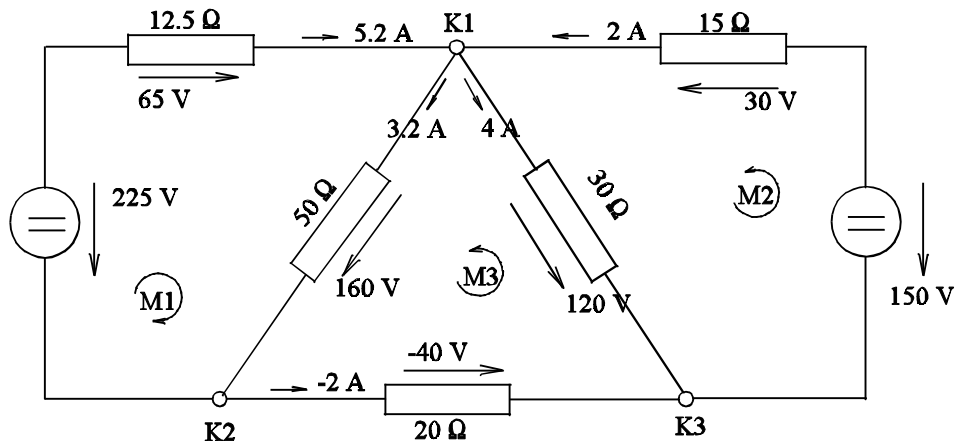


Bild EG325A: Probe Beispiel-Netzwerk

Nach einer strengen Probe müßten erst die Ströme ins Netzwerk eingetragen werden. Danach müssen die folgenden Gesetze überprüft werden:

- ohmsches Gesetz,
- 1. Kirchhoffsches Gesetz (Knotensumme) und
- 2. Kirchhoffsches Gesetz (Maschenumlauf)

Nachdem die Ströme eingetragen sind, sollten die Spannungen erneut mit Hilfe der Widerstände berechnet werden. Danach erfolgt die Überprüfung der Stromsumme in den einzelnen Knoten:

$$\begin{array}{lll}
 \text{K1:} & 5.2 \text{ A} + 2 \text{ A} = 3.2 \text{ A} + 4 \text{ A} & \Rightarrow \text{OK} \\
 \text{K2:} & 3.2 \text{ A} = 5.2 \text{ A} + (-2 \text{ A}) & \Rightarrow \text{OK} \\
 \text{K3:} & -2 \text{ A} + 4 \text{ A} = 2 \text{ A} & \Rightarrow \text{OK}
 \end{array}$$

Als letztes müssen Maschenumläufe überprüft werden:

$$\begin{array}{lll}
 \text{M1:} & 225 \text{ V} = 65 \text{ V} + 160 \text{ V} & \Rightarrow \text{OK} \\
 \text{M2:} & 150 \text{ V} = 30 \text{ V} + 120 \text{ V} & \Rightarrow \text{OK} \\
 \text{M3:} & -120 \text{ V} + 160 \text{ V} - 40 \text{ V} = 0 & \Rightarrow \text{OK}
 \end{array}$$

Sind alle Bedingungen erfüllt, gilt die Aufgabe als richtig gelöst. Ist nur eine Bedingung nicht erfüllt, muß der Fehler gesucht werden.

3.2.3. Zusammenfassung**Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze**

gegeben: Netzwerk mit k - Knoten und z - Zweigen

gesucht: 2 z Variable (z-Ströme und z-Spannungen)

Schema zur Berechnung:

A] Ströme und Spannungen mit Pfeile bezeichnen. Falls möglich, die Richtung so wählen, daß sich positive Werte ergeben.

B] Spannungen an den Widerständen mit Hilfe des ohmschen Gesetzes durch die Ströme ausdrücken:

$$U_i = R_i * I_i \quad i = 1 \dots z$$

C] (k-1) - Knoten-Gleichungen notieren.

D] Den Rest zum Gleichungssystem z. Ordnung durch Maschen-Gleichungen auffüllen.

$$m = z - (k - 1) \quad - \text{ Maschen-Gleichungen}$$

Dazu m Maschenrichtungen einzeichnen. m Maschenumläufe ergeben m Maschen-Gleichungen.

E] Gleichungssystem als Matrix mal Vektor schreiben:

$$\bar{M} * \bar{I} = \bar{k}$$

F] Gleichungssystem normieren:

$$\bar{M}^N * \bar{I}^N = \bar{U}_q^N$$

G] Gleichungssystem mit Zahlenwerten lösen.

H] Entnormieren \Rightarrow physikalische Größen: Ströme

I] Ohmsches Gesetz \Rightarrow Spannungen an R

J] Ströme und Spannungen im Netzwerk eintragen.

K] Probe:
 - z mal ohmsches Gesetz,
 - k mal Knotensumme und
 - m mal Maschenumlauf

3.2.4. Beispiele zu Knoten und Maschenanalyse

Beispiel 1: Netzwerk 3B

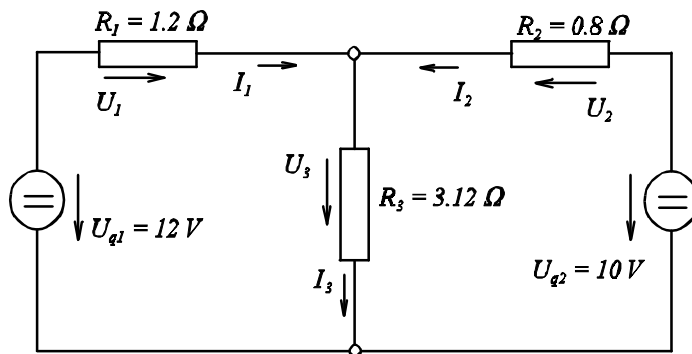


Bild EGNET3B

$z = 3$ $k = 2$ \Rightarrow 1 Kontengleichung 3-(2-1) Maschengleichungen

Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \\ R_1 \cdot I_1 + R_3 \cdot I_3 &= U_{q1} && (\text{aus } U_1 + U_3 = U_{q1}) \\ R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 &= U_{q2} && (\text{aus } U_2 + U_3 = U_{q2}) \end{aligned}$$

1	1	-1
R_1		R_3
	R_2	R_3

I_1
I_2
I_3

 $=$

0
U_{q1}
U_{q2}

Werte einsetzen:

1	1	-1
$1.2 \, \Omega$		$3.12 \, \Omega$
	$0.8 \, \Omega$	$3.12 \, \Omega$

I_1
I_2
I_3

 $=$

0
12 V
10 V

Normieren:

1	1	-1
1.2		3.12
	0.8	3.12

I_1^N
I_2^N
I_3^N

 $=$

0
12
10

Zeile 2 und 3 mit Faktor multiplizieren:

1	1	-1
15	0	39
0	10	39

I_1^N
I_2^N
I_3^N

 $=$

0
150
125

Lösung mittels Gauß'schen Algorithmus:

1	1	-1	0	1
15	0	39	150	204
-15	-15	15	0	-15
0	10	39	125	174
	-15	54	150	189
	1	-3.6	-10	-12.6
	10	39	125	174
	-10	36	100	126
		75	225	300
		1	3	4

$$I_3^N = 3$$

$$I_2^N = 3.6 * I_3^N - 10 = 3.6 * 3 - 10 = 0.8$$

$$I_1^N = -I_2^N + I_3^N = -0.8 + 3 = 2.2$$

Entnormieren und Anwendung des ohmschen Gesetzes

$$I_1 = 2.2 \text{ A}$$

$$U_1 = 1.2 \Omega * 2.2 \text{ A} = 2.64 \text{ V}$$

$$I_2 = 0.8 \text{ A}$$

$$U_2 = 0.8 \Omega * 0.8 \text{ A} = 0.64 \text{ V}$$

$$I_3 = 3 \text{ A}$$

$$U_3 = 3.12 \Omega * 3 \text{ A} = 9.36 \text{ V}$$

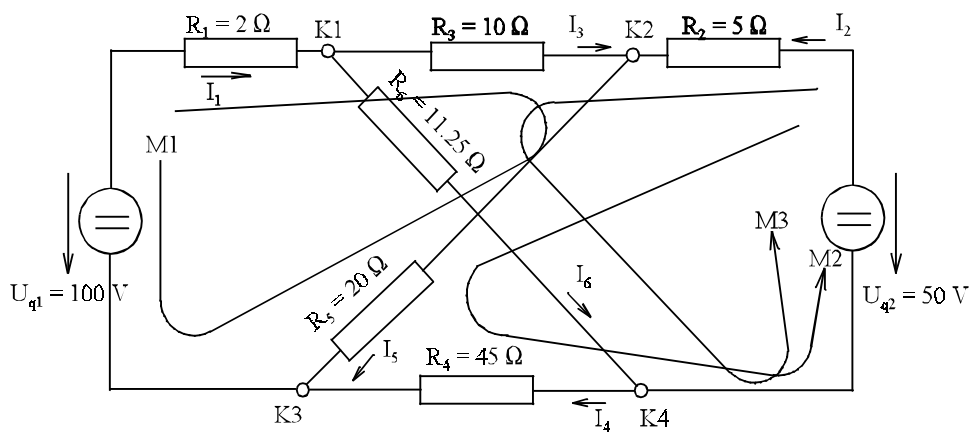
Probe: (nicht vergessen)**Beispiel 2:** Netzwerk 3F

Bild EG326A

$$k = 4$$

$$z = 6$$

$$m = z - (k - 1) = 6 - (4 - 1) = 3$$

$$\begin{aligned} \text{K1: } & I_1 - I_3 - I_6 = 0 \\ \text{K2: } & I_2 + I_3 - I_5 = 0 \\ \text{K3: } & -I_1 + I_4 + I_5 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{M1: } & R_1 \cdot I_1 + R_3 \cdot I_3 + R_5 \cdot I_5 = U_{q1} \\ \text{M2: } & R_2 \cdot I_2 + R_5 \cdot I_5 - R_4 \cdot I_4 = U_{q2} \\ \text{M3: } & R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 + R_6 \cdot I_6 = U_{q2} \end{aligned}$$

1	2	3	4	5	6			
1		-1			-1	I_1	=	0
	1	1		-1		I_2		0
-1			1	1		I_3		0
R_1		R_3		R_5		I_4		U_{q1}
	R_2		$-R_4$	R_5		I_5		U_{q2}
	R_2	$-R_3$			R_6	I_6		U_{q2}

1		-1			-1	I_1^N	=	0
	1	1		-1		I_2^N		0
-1			1	1		I_3^N		0
2		10		20		I_4^N		100
	5		-45	20		I_5^N		50
	5	-10			1125	I_6^N		50

$$\bar{M}^N \cdot \bar{I}^N = \bar{U}_q^N$$

$$\bar{I}^N = (\bar{M}^N)^{-1} \cdot \bar{U}_q^N$$

Eingabe in den Taschenrechner ergibt durch Invertieren von \bar{M}^N und anschließender Multiplikation mit \bar{U}_q^N :

I_1^N		5
I_2^N		3
I_3^N		1
I_4^N		1
I_5^N		4
I_6^N		4

Entnormieren und Anwendung der ohmschen Gesetzes ergibt:

$$\begin{aligned} U_1 &= 10 \text{ V} \\ U_5 &= 80 \text{ V} \\ I_1 &= 5 \text{ A} \\ I_5 &= 4 \text{ A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2 &= 15 \text{ V} \\ U_6 &= 45 \text{ V} \\ I_2 &= 3 \text{ A} \\ I_6 &= 4 \text{ A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_3 &= 10 \text{ V} \\ I_3 &= 1 \text{ A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_4 &= 45 \text{ V} \\ I_4 &= 1 \text{ A} \end{aligned}$$

3.3. Maschenstrom-Verfahren

3.3.1. Einführung von Maschenströmen

In jeder Masche wird ein Maschenstrom eingeführt. Dieses soll anhand des Beispiel-Netzwerkes diskutiert werden, siehe Bild EG331A.

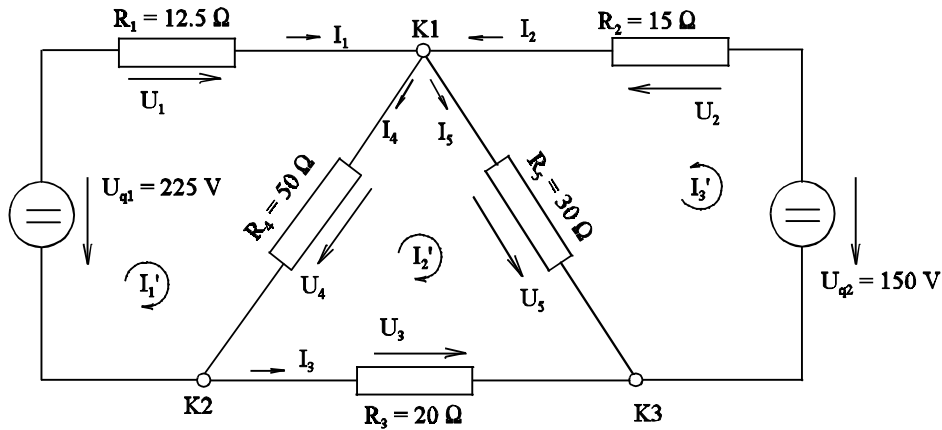


Bild EG331A

Die Maschenströme werden zur Unterscheidung der Zweigströme mit einem Strich gekennzeichnet.

Der Maschenstrom kann als Kreisstrom in der Masche angesehen werden. In manchen Zweigen sind mehrere Maschen- bzw. Kreisströme beteiligt. Die Zweigströme ergeben sich durch die Überlagerung aller Maschenströme unter Beachtung des Vorzeichens. Für das Beispiel-Netzwerk mit $z = 5$ Zweigen und $k = 3$ Knoten ergibt sich die Anzahl der Maschen:

$$m = z - (k - 1) = 5 - (3 - 1) = 3$$

Drei Maschen und somit die drei Maschenströme

$$I_1', I_2' \text{ und } I_3'$$

sind erforderlich. Die Zweigströme ausdrückt durch die Maschenströme ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1' \\ I_2 &= I_3' \\ I_3 &= -I_2' \\ I_4 &= I_1' - I_2' \\ I_5 &= I_2' + I_3' \end{aligned}$$

Der Maschenumlauf (Maschenrichtung gleiche Richtung der Maschenströme) des Beispiel-Netzwerkes ergibt:

$$\begin{aligned} M1: \quad I_1 * R_1 + I_4 * R_4 &= U_{q1} \\ M2: \quad I_5 * R_5 - I_3 * R_3 - I_4 * R_4 &= 0 \\ M3: \quad I_2 * R_2 + I_5 * R_5 &= U_{q2} \end{aligned}$$

Die Ströme in den oberen drei Gleichungen können durch die Maschenströme ersetzt werden:

$$\begin{aligned} I_1' * R_1 + (I_1' - I_2') * R_4 &= U_{q1} \\ (I_2' + I_3') * R_5 - (-I_2') * R_3 - (I_1' - I_2') * R_4 &= 0 \\ I_3' * R_2 + (I_2' + I_3') * R_5 &= U_{q2} \end{aligned}$$

Ordnen nach Maschenströme ergibt:

$$\begin{aligned} I_1' \cdot (R_1 + R_4) - I_2' \cdot R_4 &= U_{q1} \\ -I_1' \cdot R_4 + I_2' \cdot (R_4 + R_3 + R_5) + I_3' \cdot R_5 &= 0 \\ I_2' \cdot R_5 + I_3' \cdot (R_2 + R_5) &= U_{q2} \end{aligned}$$

Übersichtlicher ist die Umformung in die Matrix-Schreibweise:

	I_1'	I_2'	I_3'		
1'	$R_1 + R_4$	$-R_4$	0	I_1'	U_{q1}
2'	$-R_4$	$R_3 + R_4 + R_5$	R_5	I_2'	0
3'	0	R_5	$R_2 + R_5$	I_3'	U_{q2}

=

Es ist sicherlich kein Zufall, was in der oberen Matrix für Elemente vorhanden sind.

Hauptdiagonale: Hier sind die Widerstände, die beim Maschenumlauf auftreten, als Summe aufgeführt.

Nebenelemente: Dort sind die Koppel-Elemente zwischen zwei Maschen vorhanden. An der Stelle 1'-2' taucht der Widerstand R_4 auf, weil er sowohl vom Maschenstrom I_1' als auch von I_2' durchflossen wird. Das gleiche gilt für 2'-1' aus Symmetrie-Gründen. Auch der Widerstand R_5 wird von zwei Maschenströmen durchflossen und zwar von I_3' und I_2' . Somit taucht der Widerstand R_5 bei 2'-3' und 3'-2' auf. Warum ist das Vorzeichen bei R_4 und R_5 unterschiedlich? Werden die Koppel-Elemente vom Maschenstrom gleichsinnig durchflossen, ist das Vorzeichen plus zu wählen. Sind die Maschen-Richtungen in den Koppel-Elementen unterschiedlich, muß das Vorzeichen Minus gewählt werden. Anmerkung: Die Matrix ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen.

Spannungs-Vektor: Als Anregung ist der Vektor der Quellspannungen vorhanden. In der Masche zwei sind keine Spannungen vorhanden, daher auch keine Anregung. Hier stehen, unter Beachtung des Vorzeichens für die entsprechende Masche, die Summe der Quellspannungen. Positiv wird die Spannung gezählt, wenn die Quelle einen positiven Maschenstrom beitragen würde.

Einsetzen von Zahlenwerten in die obere Matrix-Gleichung

$62.5 \, \Omega$	$-50 \, \Omega$	0	I_1'	=	$225 \, \text{V}$
$-50 \, \Omega$	$100 \, \Omega$	$30 \, \Omega$	I_2'	=	0
0	$30 \, \Omega$	$45 \, \Omega$	I_3'	=	$150 \, \text{V}$

62.5	-50	0	$I_1'^N$	=	225
-50	100	30	$I_2'^N$	=	0
0	30	45	$I_3'^N$	=	150

Normiertes Gleichungssystem lösen

Die Zeilen werden durch 12.5, 10 und 5 dividiert

5	-4	0	$I_1^{/N}$	=	18
-5	10	3	$I_2^{/N}$		0
0	6	9	$I_3^{/N}$		30

$I_1^{/N}$	$I_2^{/N}$	$I_3^{/N}$	Σ	
5	-4	0	18	19
1	-0.8	0	3.6	3.8
-5	10	3	0	8
5	-4	0	18	19
0	6	9	30	45
	6	3	18	27
	1	0.5	3	4.5
	6	9	30	45
	-6	-3	-18	-27
		6	12	18
		1	2	3

$$I_3^{/N} = 2$$

$$I_2^{/N} = -0.5 * I_3^{/N} + 3 = -0.5 * 2 + 3 = 2$$

$$I_1^{/N} = 0.8 * I_2^{/N} + 3.6 = 0.8 * 2 + 3.6 = 5.2$$

Normierte Zweigströme berechnen:

$$I_1^N = I_1^{/N} = 5.2$$

$$I_2^N = I_3^{/N} = 2$$

$$I_3^N = -I_2^{/N} = -2$$

$$I_4^N = I_1^{/N} - I_2^{/N} = 5.2 - 2 = 3.2$$

$$I_5^N = I_2^{/N} + I_3^{/N} = 2 + 2 = 4$$

Entnormieren und ohmsches Gesetz anwenden:

$$I_1 = 5.2 \text{ A}$$

$$I_2 = 2 \text{ A}$$

$$I_3 = -2 \text{ A}$$

$$I_4 = 3.2 \text{ A}$$

$$I_5 = 4 \text{ A}$$

$$U_1 = 65 \text{ V}$$

$$U_2 = 30 \text{ V}$$

$$U_3 = -40 \text{ V}$$

$$U_4 = 160 \text{ V}$$

$$U_5 = 120 \text{ V}$$

3.3.2. Schema zum Maschenstrom-Verfahren

Manuelles Maschenstrom-Verfahren

gegeben: Netzwerk mit z-Zweigen und k-Knoten

gesucht: 2 z Variable (z-Ströme und z-Spannungen)

- A] Zweigrichtungen festlegen.
- B] $m = z - (k - 1)$ Maschenströme I_j' mit Richtung und Masche festlegen ($j = 1 \dots n$).
- C] Gleichungssystem $(z - k + 1)$. Ordnung mit den Maschenströmen als Variable aufstellen

$$\bar{R}' * \bar{I}' = \bar{U}_q'$$

- D] **Haupt-Diagonale:** Summe der Maschen-Widerstände eintragen.
 - E] **Neben-Elemente:**
 - a) Symmetrisch zur Haupt-Diagonalen eintragen.
 - b) Bei ij und ji steht der Widerstand in der Masche i und der Masche j gemeinsam vorkommen.
 - + wenn beide Maschenrichtungen gleichsinnig sind
 - wenn beide Maschenrichtungen gegensinnig sind
 - F] **Spannungs-Vektor:** Dort werden die Summen der Quellspannungen einer Masche aufsummiert.
 - + wenn U_{qi} positiven Maschestrom treibt
 - wenn U_{qi} und Maschenrichtung gleich sind
 - G] Gleichungssystem normieren.
- $$\bar{R}^{N'} * \bar{I}^{N'} = \bar{U}_q^{N'}$$
- H] Gleichungssystem mit nur Zahlenwerten lösen.
 - I] Entnormieren => physikalische Größen der Maschenströme.
 - J] Zweigströme mit Hilfe der Maschestrome berechnen.
 - K] ohmsches Gesetz => Zweig-Spannungen.
 - L] Ströme und Spannungen im Netzwerk eintragen.
 - N] Probe
 - ohmsches Gesetz
 - Stromsumme
 - Maschenumläufe

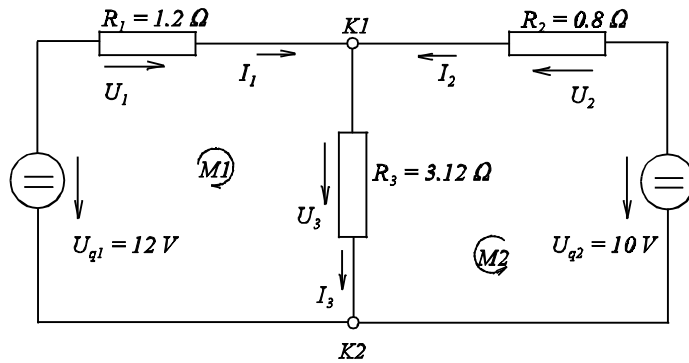
3.3.3. Beispiele zum Maschenstromverfahren**Beispiel 1:** (Netzwerk 3B)

Bild EG333A

$$z = 3$$

$$k = 2$$

$$m = z - (k - 1) = 3 - (2 - 1) = 2$$

$R_1 + R_3$	R_3	I_1'	U_{q1}
R_3	$R_2 + R_3$	I_2'	U_{q2}
4.32Ω	3.12Ω	I_1'	12 V
3.12Ω	3.92Ω	I_2'	10 V

Cramer Regel:

$$I_1' = \frac{\begin{vmatrix} 12 \text{ V} & 3.12 \Omega \\ 10 \text{ V} & 3.92 \Omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4.32 \Omega & 3.12 \Omega \\ 3.12 \Omega & 3.92 \Omega \end{vmatrix}} = \frac{12 \text{ V} \cdot 3.92 \Omega - 10 \text{ V} \cdot 3.12 \Omega}{(4.32 \cdot 3.92 - 3.12^2) \Omega^2} = \frac{15.84 \text{ V}\Omega}{7.2 \Omega^2} = 2.2 \text{ A}$$

$$I_1 = I_1' = 2.2 \text{ A}$$

$$U_1 = R_1 \cdot I_1 = 1.2 \Omega \cdot 2.2 \text{ A} = 2.64 \text{ V}$$

$$U_3 = U_{q1} - U_1 = 12 \text{ V} - 2.64 \text{ V} = 9.36 \text{ V}$$

$$U_2 = U_{q2} - U_3 = 10 \text{ V} - 9.36 \text{ V} = 0.64 \text{ V}$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{9.36 \text{ V}}{3.12 \Omega} = 3 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{0.64 \text{ V}}{0.8 \Omega} = 0.8 \text{ A}$$

Probe: $I_1 + I_2 = I_3$

$$2.2 + 0.8 \text{ A} = 3 \text{ A}$$

 \Rightarrow OK

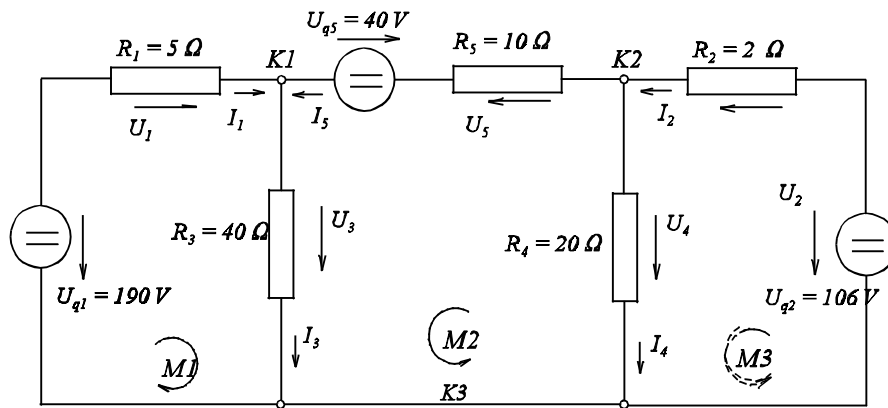
Beispiel 2: (Netzwerk 3G)

Bild EG333B

Die Stromquelle im Zweig 5 muß beim Maschenstromverfahren in einer äquivalente Spannungsquelle umgewandelt werden.

$$z = 5$$

$$k = 3$$

$$m = z - (k - 1) = 5 - (3 - 1) = 3$$

	1'	2'	3'		
1'	$R_1 + R_3$	R_3	0	I_1'	U_{q1}
2'	R_3	$R_3 + R_5 + R_4$	$-R_4$	I_2'	$R_5 \cdot I_{q5}$
3'	0	$-R_4$	$R_2 + R_4$	I_3'	U_{q2}

45	40	0	$I_1^{N'}$	190
40	70	-20	$I_2^{N'}$	40
0	-20	22	$I_3^{N'}$	106

Die Lösung des oberen Gleichungssystems ergibt:

$$I_1^{N'} = 6$$

$$I_2^{N'} = -2$$

$$I_3^{N'} = 3$$

Die Berechnung der Zweigströme ergibt:

$$I_1^N = I_1^{N'} = 6$$

$$I_2^N = I_3^{N'} = 3$$

$$I_3^N = I_1^{N'} + I_2^{N'} = 6 - 2 = 4$$

$$I_4^N = I_3^{N'} - I_2^{N'} = 3 - (-2) = 5$$

$$I_5^N = -I_2^{N'} = -(-2) = 2$$

Ohmsches Gesetz und Entnormierung ergibt:

$$I_1 = 6 \text{ A} \quad U_1 = 30 \text{ V}$$

$$I_2 = 3 \text{ A} \quad U_2 = 6 \text{ V}$$

$$I_3 = 4 \text{ A} \quad U_3 = 160 \text{ V}$$

$$I_4 = 5 \text{ A} \quad U_4 = 100 \text{ V}$$

$$I_5 = 2 \text{ A} \quad U_5 = 20 \text{ V}$$

Der Zweig 5 muß wieder zurück gewandelt werden:

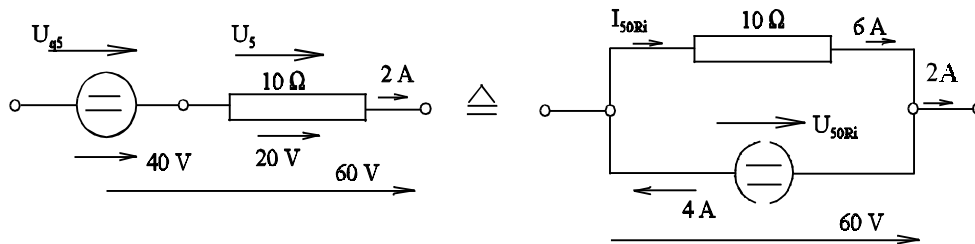


Bild EG333C

$$U_{50Ri} = U_{q5} + U_5 = 40 \text{ V} + 20 \text{ V} = 60 \text{ V}$$

$$I_{50Ri} = U_{50Ri} / R_5 = 60 \text{ V} / 10 \Omega = 6 \text{ A}$$

3.3.4. Maschenstrom-Verfahren für Rechner

Die Möglichkeit des Auftretens eines Fehlers ist bei der Aufstellung des manuellen Maschenstrom-Verfahrens schon wesentlich geringer als bei der Maschen- und Knotenanalyse. Eine weitere Vereinfachung ist, die Struktur des Netzwerkes und den Inhalt der Zweige in getrennten Matrizen einzugeben. Ein Rechner kann dann die Matrix-Berechnung vornehmen und die Eingabe und das Ergebnis ausgeben.

In einem Netzwerk mit z -Zweigen und k -Knoten müssen erfüllt sein:

- z Gleichungen des ohmschen Gesetzes
- $k-1$ Knoten-Gleichungen
- $z-(k-1)$ Maschen-Gleichungen

Es soll nun versucht werden obere $2z$ Gleichungen in eine Matrix-Schreibweise zu überführen.

Definition der Zweigrichtung

Damit das Maschenstromverfahren für Rechner funktioniert, wird definiert: Die Zweigrichtung ist die Richtung der Spannung am Widerstand, die die gleiche Richtung aufweist als der Zweigstrom. Eine evtl. vorhandene Quellspannung muß entgegengesetzt zur Zweigrichtung gewählt werden. Merke: Quellspannung muß positiven Anteil am Zweigstrom beitragen.

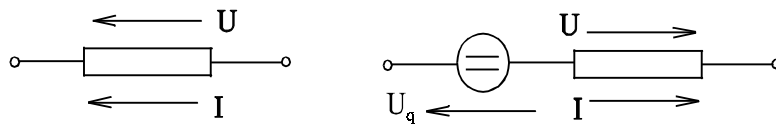


Bild EG334A

Auswertung ohmsches Gesetz

Der Zusammenhang zwischen Strömen und Spannungen in den z -Zweigen ist über das ohmsches Gesetz angegeben:

$$\begin{aligned} U_1 &= R_1 \cdot I_1 \\ U_2 &= R_2 \cdot I_2 \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \\ U_z &= R_z \cdot I_z \end{aligned}$$

oder als Matrix mal Vektor:

$$\bar{U} = \bar{R} \cdot \bar{I} \quad (1)$$

\bar{U} - Vektor der Zweigspannung an den Widerständen

\bar{R} - Widerstandsmatrix

\bar{I} - Vektor der Zweigströme

mit den Komponenten

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ \dots \\ U_z \end{pmatrix} \quad \bar{R} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline R_1 & & & & \\ \hline & R_2 & & & \\ \hline & & \dots & & \\ \hline & & & \dots & \\ \hline & & & & R_z \\ \hline \end{array} \quad \bar{I} = \begin{array}{|c|} \hline I_1 \\ \hline I_2 \\ \hline \dots \\ \hline \dots \\ \hline I_z \\ \hline \end{array}$$

Die Dimension sind: $\text{Dim}(\bar{U}) = (z, 1)$ $\text{Dim}(\bar{R}) = (z, z)$ $\text{Dim}(\bar{I}) = (z, 1)$

Auswertung 1. Kirchhoffsches Gesetz

Die Knotensumme beschreibt das 1. Kirchhoffsche Gesetz. Die Umrechnung von Maschenströme auf Zweigströme soll in Matrix-Form untersucht werden. Die einzelnen Zweigströme ergeben sich aus der Summe der Maschenströme gewichtet mit "+1", "0" oder "-1". Dieses läßt sich in Matrix-Form schreiben.

			1	2	m	
I_1		1	I_1'
I_2		2	I_2'
...	=
...	
I_z		z	I_m'

und als Abkürzung

$$\bar{I} = \bar{C} * \bar{I}' \quad (2)$$

\bar{I}' - Vektor der Maschenströme

$$\bar{I}' = \begin{array}{|c|} \hline I_1' \\ \hline I_2' \\ \hline \dots \\ \hline \dots \\ \hline I_z' \\ \hline \end{array}$$

Die Dimensionen sind:

$$\text{Dim}(\bar{I}) = (z, 1) \qquad \text{Dim}(\bar{C}) = (z, m) \qquad \text{Dim}(\bar{I}') = (m, 1)$$

Was steht nun der C Matrix, und wie wird diese aufgestellt? Der Inhalt ist, wie schon erwähnt "0", "-1" und "1". Die Dimension sagt aus: Anzahl der Zweige und Anzahl der Maschen. An den Verknüpfungspunkten Zweig Masche ist die Information enthalten, ob der Zweig zur Masche gehört oder nicht. Gehört der Zweig nicht zur Masche, wird eine "0" eingetragen. Das bedeutet, daß der entsprechende Maschenstrom nicht zum Zweigstrom beiträgt. Sind Maschen- und Zweigrichtung (Definition siehe unten) gleich, wird eine "1" eingetragen; bei entgegengesetzter Richtung wird eine "-1" eingetragen.

Einfacher ist es aber, aus dem Netzwerk heraus die Zweigströme als Summe der Maschenströme anzugeben und in die Matrixform

$$\bar{I} = \bar{C} * \bar{I}'$$

umzuschreiben. Dabei kann \bar{C} abgelesen werden.

Auswertung 2. Kirchhoffsches Gesetz

Die Maschenregel kann auch in folgender Form angegeben werden: In jeder Masche ist die Summe der Quellspannungen (unter Beachtung des Vorzeichens) gleich der Summe der Spannungsabfälle an den Widerständen (auch unter Beachtung des Vorzeichens). Dieses kann vektoriell in der folgenden Form erfolgen:

$$\begin{array}{|c|} \hline U_1' \\ \hline U_2' \\ \hline \dots \\ \hline \dots \\ \hline U_z' \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline U_{q1}' \\ \hline U_{q2}' \\ \hline \dots \\ \hline \dots \\ \hline U_{qz}' \\ \hline \end{array}$$

$$\bar{U}' = \bar{U}_q'$$

Die Vektoren bedeuten:

\bar{U}' - Summe der Spannungen an den Widerständen einer Masche

\bar{U}_q' - Summe der Quellspannungen pro Masche, schon aus dem normalen Maschenstromverfahren bekannt.

Die Summe der Spannungen in einer Masche ist wieder vom Netzwerk abhängig und kann somit wieder als Matrix mal Vektor geschrieben werden, wobei in der Matrix wieder "0", "1" und "-1" vorhanden sind.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & \dots & z \\ \hline 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \begin{array}{|c|} \hline U_1 \\ \hline U_2 \\ \hline \dots \\ \hline \dots \\ \hline U_z \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & \dots & z \\ \hline 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \begin{array}{|c|} \hline U_{q1} \\ \hline U_{q2} \\ \hline \dots \\ \hline \dots \\ \hline U_{qz} \\ \hline \end{array}$$

Die Matrix hat die Dimension (m, z) und ist wieder vom Netzwerk abhängig. Am Kreuzungspunkt Masche Zweig steht wieder der Zusammenhang Masche Zweig. Wenn der Zweig nicht in der Masche vorkommt steht eine "0". Maschenrichtung gleich Zweigrichtung ergibt eine "1". Bei Maschenrichtung entgegengesetzt der Zweigrichtung muß eine "-1" eingetragen werden. Die obere Matrix sieht ähnlich aus wie die \bar{C} -Matrix, die die Verknüpfung von Maschen- und Zweigströmen angibt. Beide Matrizen sind fast identisch und enthalten per Definition die gleichen Inhalte.

$$\text{Dim}(C) = (z, m)$$

Die Dimension der oberen Matrix ist:

$$(m, z)$$

Die obere Matrix ist die transponierte der \bar{C} -Matrix: \bar{C}^T . Somit lassen sich alle Maschen-Gleichungen in der Matrix-Schreibweise angeben:

$$\bar{C}^T * \bar{U} = \bar{C}^T * \bar{U}_q \quad (3)$$

\bar{U}_q - Vektor der Quellspannung in den Zweigen

Zusammenfassung der bisherigen Formeln:

Strichgröße ist Maschengröße, ohne Strich entspricht Zweiggröße.

$$\bar{U} = \bar{R} * \bar{I} \quad (1)$$

$$\bar{I} = \bar{C} * \bar{I}' \quad (2)$$

$$\bar{C}^T * \bar{U} = \bar{C}^T * \bar{U}_q \quad (3)$$

(2) in (1) eingesetzt ergibt:

$$\bar{U} = \bar{R} * \bar{C} * \bar{I}' \quad (4)$$

(4) in (3) eingesetzt:

$$\bar{C}^T * \bar{R} * \bar{C} * \bar{I}' = \bar{C}_T * \bar{U}_q \quad (5)$$

Obere Gleichung ist die Gleichung des manuellen Maschenstrom-Verfahrens. Mit

$$\bar{R}' = \bar{C}^T * \bar{R} * \bar{C} \quad (6)$$

$$\bar{U}_q' = \bar{C}_T * \bar{U}_q \quad (7)$$

ergibt die schon bekannte Matrix-Gleichung des manuellen Maschenstromverfahren

$$\bar{R}' * \bar{I}' = \bar{U}_q' \quad (8)$$

Matrixinversion:

$$\bar{I}' = \bar{R}'^{-1} * \bar{U}_q' \quad (9)$$

Umrechnung auf Zweigströme, einsetzen (9) in (2) ergibt:

$$\bar{I} = \bar{C} * \bar{I}' = \bar{C} * \bar{R}'^{-1} * \bar{U}_q' \quad (10)$$

Ersetzen der Maschengrößen durch Zweiggrößen, einsetzen von (6) und (7) in (10) ergibt:

$$\bar{I} = \bar{C} * [\bar{C}^T * \bar{R} * \bar{C}]^{-1} * \bar{C}_T * \bar{U}_q \quad (11)$$

$$\bar{U} = \bar{R} * \bar{I}$$

$$\bar{U} = \bar{R} * \bar{C} * [\bar{C}^T * \bar{R} * \bar{C}]^{-1} * \bar{C}_T * \bar{U}_q \quad (12)$$

Obere Gleichungen beinhalten Matrix-Operationen. Bei entsprechenden Unterprogrammen müssen nur die Matrizen \bar{R} , \bar{C} und \bar{U}_q eingegeben werden. Auch der HP 48 kann bei Eingabe von \bar{R} , \bar{C} und \bar{U}_q die Berechnung ausführen.

Aufstellung von \bar{R} , \bar{C} und \bar{U}_q für das Beispiel-Netzwerk

Siehe Bild EG331A. Nachdem die Richtungen der Zweige und die Maschenströme eingetragen sind, kann die Matrix \bar{C} nach zwei Methoden aufgestellt werden:

- A] Der Maschenumlauf ergibt eine Spalte.
 B] Die Umrechnung von Maschenströme auf Zweigströme ist die Information einer Zeile.

Für die unten angegebene Matrix wurden die "1", "0" "-1" mit Hilfe der Berechnung der Zweigströme aus den Maschenströmen vorgenommen. Die in die Matrix eingetragenen Koeffizienten wurden aus den Gleichungen rechts der Matrix entnommen.

		1	2	3	→ Maschen
$\bar{C} =$	1	1			
	2			1	
	3		-1		
	4	1	-1		
	5		1	1	
	Zweige				

$$I_1 = 1 \cdot I'_1 + 0 \cdot I'_2 + 0 \cdot I'_3$$

$$I_2 = 0 \cdot I'_1 + 0 \cdot I'_2 + 1 \cdot I'_3$$

$$I_3 = 0 \cdot I'_1 - 1 \cdot I'_2 + 0 \cdot I'_3$$

$$I_4 = 1 \cdot I'_1 - 1 \cdot I'_2 + 0 \cdot I'_3$$

$$I_5 = 0 \cdot I'_1 + 1 \cdot I'_2 + 1 \cdot I'_3$$

$$I_1 = 1 \cdot I'_1 + 0 \cdot I'_2 + 0 \cdot I'_3$$

$$I_2 = 0 \cdot I'_1 + 0 \cdot I'_2 + 1 \cdot I'_3$$

$$I_3 = 0 \cdot I'_1 - 1 \cdot I'_2 + 0 \cdot I'_3$$

$$I_4 = 1 \cdot I'_1 - 1 \cdot I'_2 + 0 \cdot I'_3$$

$$I_5 = 0 \cdot I'_1 + 1 \cdot I'_2 + 1 \cdot I'_3$$

Die Matrix \bar{R} ist bei Gleichstrom immer nur eine Diagonal-Matrix der Dimension z mal z und enthält die Widerstände in den Zweigen.

		1	2	3	4	5
$\bar{R} =$	1	R_1				
	2		R_2			
	3			R_3		
	4				R_4	
	5					R_5

In den Vektor \bar{U}_q sind die Quellspannungen in den Zweigen einzutragen.

$\bar{U}_q =$	1	U_{q1}
	2	U_{q2}
	3	0
	4	0
	5	0

Dann sind alle Matrizen und Vektoren für die Matrix-Gleichungen (11) bestimmt. Eine manuelles Berechnen ist nicht zu empfehlen. Die Eingabe in den Rechner wurde nochmal vereinfacht und somit die Fehlerwahrscheinlichkeit weiter minimiert. Für manuelles Rechnen empfiehlt sich das direkte Aufstellen des manuellen Maschenstrom-Gleichungssystems. Nach einer Normierung kann ein Rechner mit Hilfe von (11) und (12) Ströme und Spannungen direkt berechnen:

$$\bar{I} = \bar{C} * [\bar{C}^T * \bar{R} * \bar{C}]^{-1} * \bar{C}_T * \bar{U}_q \quad (11)$$

$$\bar{U} = \bar{R} * \bar{C} * [\bar{C}^T * \bar{R} * \bar{C}]^{-1} * \bar{C}_T * \bar{U}_q \quad (12)$$

Schema des Rechner-Maschenstrom-Verfahrens

gegeben: Netzwerk mit k -Knoten und z -Zweigen

A] Zweigrichtung so festlegen, daß Quelle einen positiven Anteil zum Zweigstrom liefert. D.h. wenn Spannungs-Quelle vorhanden, ist Zweigrichtung entgegengesetzt zur Quellrichtung.

B] $m = z - (k - 1)$ Maschen eindeutig festlegen

C] **Matrix \bar{C} aufstellen** $\text{Dim}(\bar{C}) = (z, m)$
Kreuzungspunkt Zweig- Masche

0 \Rightarrow keine Beeinflussung

1 \Rightarrow Maschenrichtung gleich Zweigrichtung

-1 \Rightarrow Maschenrichtung und Zweigrichtung unterschiedlich

Spalte \Rightarrow Maschenumlauf

Zeile \Rightarrow Umrechnung Maschenströme auf Zweigströme

D] **Matrix aufstellen.** Nur Diagonal-Matrix $\text{Dim}(\bar{R}) = (z, z)$. In der Diagonalen sind die Zweig-Widerstände positiv einzutragen.

E] Vektor \bar{U}_q aufstellen. $\text{Dim}(\bar{U}_q) = (z, 1)$. Die Quellspannungen der Zweige positiv eintragen.

F] Normieren

G] Zweigströme berechnen mit Hilfe eines Rechners

$$\bar{I} = \bar{C} * [\bar{C}^T * \bar{R} * \bar{C}]^{-1} * \bar{C}_T * \bar{U}_q \quad (11)$$

H] Zweigspannungen berechnen

$$\bar{U} = \bar{R} * \bar{I} \quad \bar{U} = \bar{R} * \bar{C} * [\bar{C}^T * \bar{R} * \bar{C}]^{-1} * \bar{C}_T * \bar{U}_q \quad (12)$$

I] Entnormieren

Beispiel 1:

Das Netzwerk 3N ist für das "Maschenstrom Verfahren für Rechner" aufzubereiten. Die Berechnungsvorschrift für die Zweigströme und die darin enthaltenen Matrizen und Vektoren sind anzugeben.

$$z = 6, k = 4 \Rightarrow$$

$$m = z - (k - 1) = 6 - (4 - 1) = 3$$

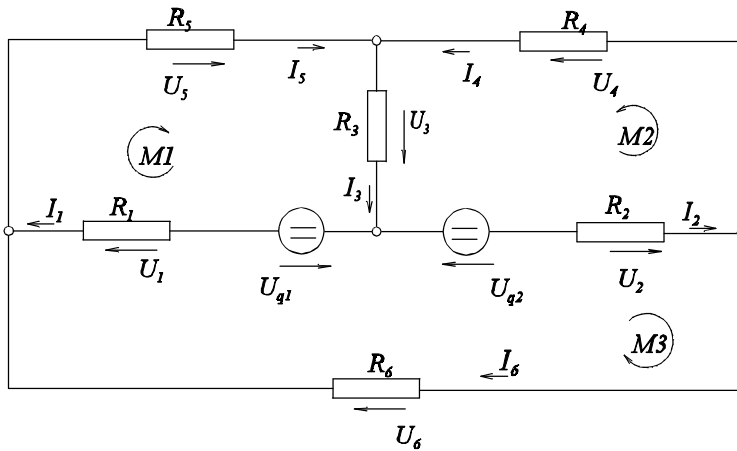


Bild EG334A

$$\bar{I} = \bar{C}[\bar{C}^T * \bar{R} * \bar{C}]^{-1} * \bar{C}_T * \bar{U}_q$$

$$\text{Dim}(\bar{C}) = (z, m) = (6, 3)$$

$$\bar{C} =$$

	1'	2'	3'
1	1		-1
2		1	1
3	1	1	
4		1	
5	1		
6			1

$$I_1 = I_1' - I_3'$$

$$I_2 = I_2' + I_3'$$

$$I_3 = I_1' + I_2'$$

$$I_4 = I_2'$$

$$I_5 = I_1'$$

$$I_6 = I_3'$$

$$\bar{R} =$$

R ₁					
	R ₂				
		R ₃			
			R ₄		
				R ₅	
					R ₆

$$\bar{U}_q =$$

U _{q1}
U _{q2}

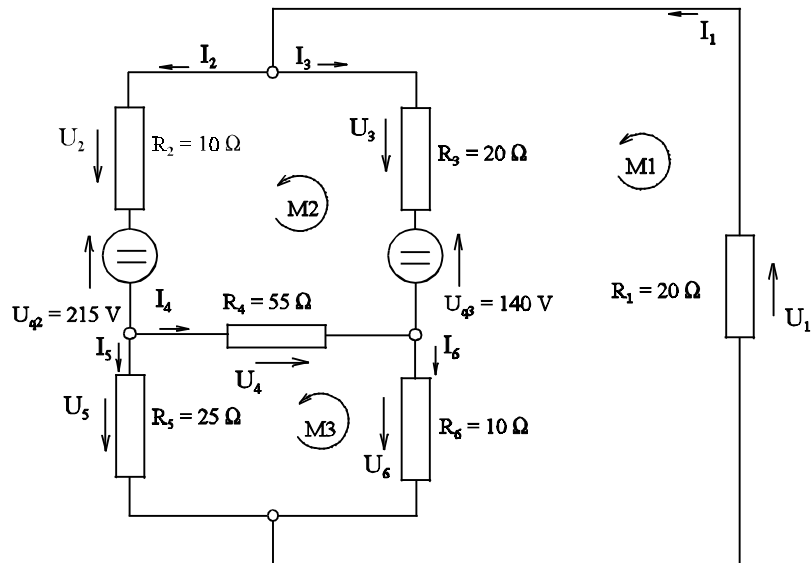
Beispiel 2:

Bild EG334A: Netzwerk 3M

$$z = 6, k = 4$$

=>

$$m = z - (k - 1) = 6 - (4 - 1) = 3$$

$$\bar{C} =$$

	1'	2'	3'
1	1		
2		1	
3	1	-1	
4		1	-1
5			1
6	1		-1

$$I_1 = I_1'$$

$$I_2 = I_2'$$

$$I_3 = I_1' - I_2'$$

$$I_4 = I_2' - I_3'$$

$$I_5 = I_3'$$

$$I_6 = I_1' - I_3'$$

$$\bar{R} =$$

R ₁					
	R ₂				
		R ₃			
			R ₄		
				R ₅	
					R ₆

$$\bar{U}_q =$$

U _{q2}
U _{q3}

3.4. Netz-Umwandlung

Mit Hilfe von Netz-Umwandlungen können Ströme und Spannungen in einem Netzwerk bestimmt werden. Die ersten zwei Methoden sind schon bekannt, drei neue sollen noch vorgestellt werden:

- Ersatzwiderstände
- Quellen-Umwandlung (Strom-Quelle \Leftrightarrow Spannungs-Quelle)
- Stern-Dreieck-Umwandlung
- Quellen-Verlegung
- Umwandlung idealer Quellen

Prinzip:

Durch mehrere Umwandlungen ist das Netzwerk auf ein Netzwerk mit nur einer Masche umzuformen. In dieser Masche sind Strom und Spannungsabfall zu bestimmen. Das Ergebnis ist weiter oben einzutragen. In den oberen Netzwerken sind dann alle Größen berechenbar. Die Ergebnisse sind weiter oben einzutragen, usw.. Am ursprünglichen Netzwerk angelangt, sind alle Größen berechnet.

3.4.1. Ersatzwiderstand

(Wiederholung)

A] Reihenschaltung

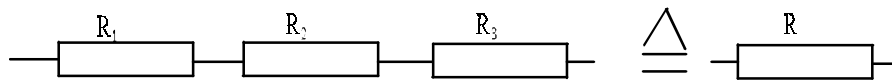


Bild EG341A

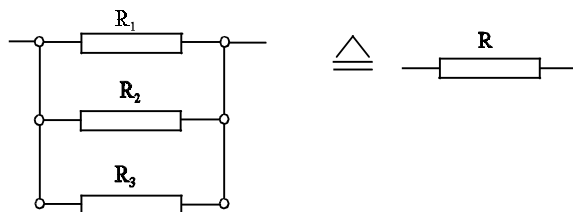
$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{1}{G_3}$$

Bei nur zwei Leitwerten gilt:

$$G = \frac{G_1 * G_2}{G_1 + G_2}$$

B] Parallelschaltung



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$G = G_1 + G_2 + G_3$$

Bild EG341B

Bei zwei Widerständen gilt:

$$R = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2}$$

3.4.2. Quellenumwandlung

3.4.2.1. Umwandlung Strom- und Spannungs-Quellen

(Wiederholung)

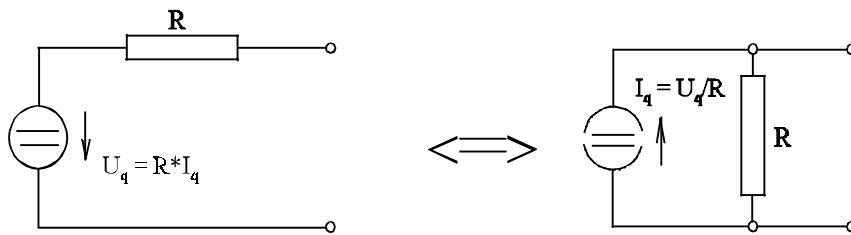


Bild EG3421A

3.4.2.2. Reihenschaltung idealer Spannungs-Quellen

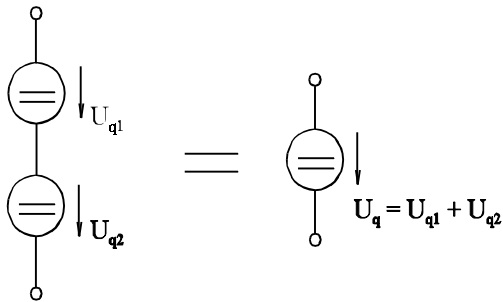


Bild EG3422A

3.4.2.3. Parallelschaltung idealer Strom-Quellen

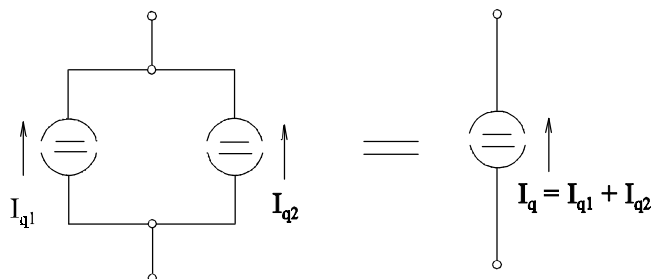


Bild EG3423A

3.4.2.4. Beispiele zur Umwandlung Strom- und Spannungs-Quellen

Beispiel 1:

Für das Beispiel-Netzwerk (Netzwerk 3A) sind mit Hilfe von Quellenwandlung sämtliche Ströme und Spannungen zu bestimmen.

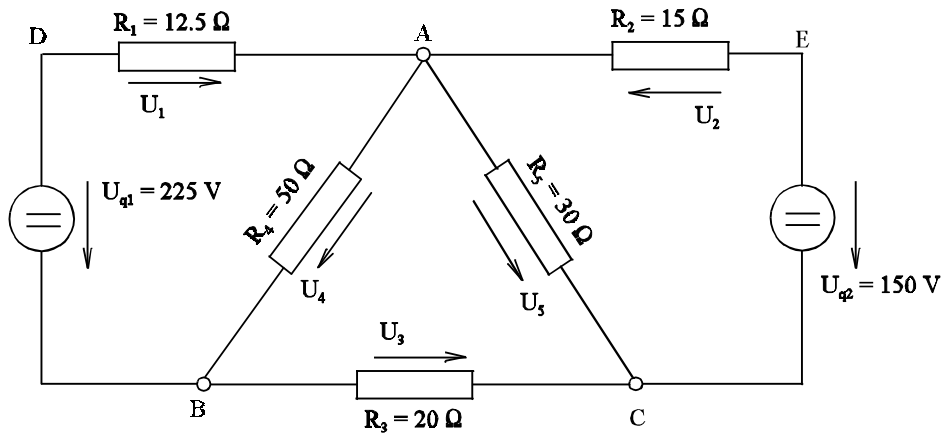


Bild EG3424A

Beim Beispiel-Netzwerk (Bild EG3424A) werden die beiden äußeren Spannungsquellen in Stromquellen umgewandelt, siehe Bild EG3424B.

$$I_{q1} = \frac{U_{q1}}{R_1} = \frac{225 \text{ V}}{12.5 \Omega} = 18 \text{ A} \quad I_{q2} = \frac{U_{q2}}{R_2} = \frac{150 \text{ V}}{15 \Omega} = 10 \text{ A}$$

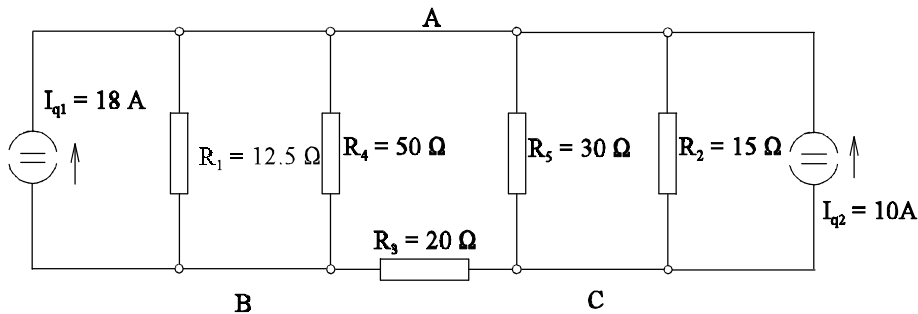
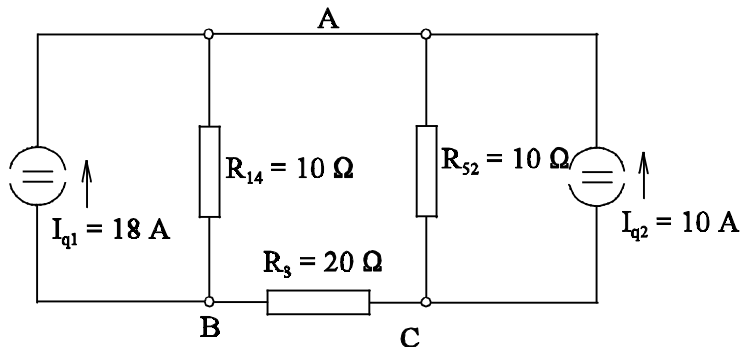


Bild EG3424B

Die Widerstände R_1 , R_4 und R_2 , R_5 werden zusammengefaßt, siehe Bild EG3424C.

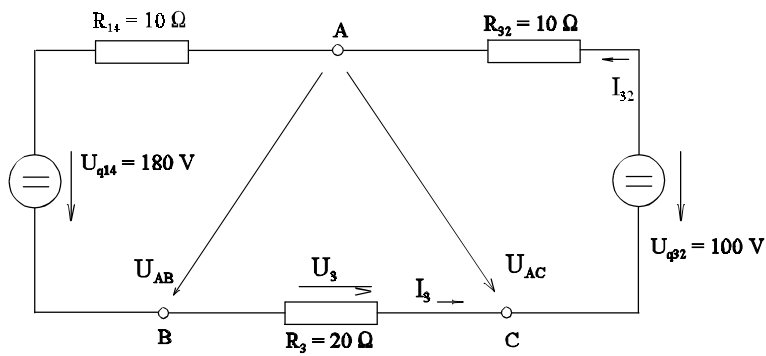


$$R_{14} = \frac{R_1 \cdot R_4}{R_1 + R_4} = 10 \Omega$$

$$R_{52} = \frac{R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_5} = 10 \Omega$$

Bild EG3424C

Die beiden Stromquellen in Bild EG3424C werden wieder in Spannungsquellen zurückgewandelt, siehe Bild EG3424D.



$$U_{q14} = R_{14} \cdot I_{q1} = 180 \text{ V}$$

$$U_{q32} = R_{23} \cdot I_{q2} = 100 \text{ V}$$

Bild EG3424D

Aus Bild EG3424D lässt sich der Strom I_3 direkt bestimmen

$$I_3 = \frac{U_{q32} - U_{q14}}{R_{14} + R_{32} + R_3} = \frac{180 \text{ V} - 100 \text{ V}}{10 \Omega + 10 \Omega + 20 \Omega} = -2 \text{ A}$$

$$U_3 = I_3 \cdot R_3 = -2 \text{ A} \cdot 20 \Omega = -40 \text{ V}$$

Achtung: Bei Netzumformungen bleiben einige Knotenpunkte erhalten (z.B. A, B, und C), andere Punkte (z.B. D und E) sind im umgeformten Netzwerk nicht mehr enthalten.

Mit $I_3 = -2 \text{ A}$ können aus Bild EG3424D die folgenden Spannungen berechnet werden:

$$U_{AB} = U_{q14} + R_{14} \cdot I_3 = 180 \text{ V} + 10 \Omega \cdot (-2 \text{ A}) = 160 \text{ V}$$

$$U_{AC} = U_{q32} - R_{32} \cdot I_3 = 100 \text{ V} - 10 \Omega \cdot (-2 \text{ A}) = 120 \text{ V}$$

Da die Punkte A, B und C auch im ursprünglichen Netzwerk, Bild EG3424A, enthalten sind, können die folgenden Spannungen übernommen werden:

$$U_4 = U_{AB} = 160 \text{ V}$$

$$U_5 = U_{AC} = 120 \text{ V}$$

Aus zwei Maschenumläufen lassen sich die zwei restlichen Spannungen berechnen:

$$U_1 = U_{q1} - U_4 = 225 \text{ V} - 160 \text{ V} = 65 \text{ V}$$

$$U_2 = U_{q2} - U_5 = 150 \text{ V} - 120 \text{ V} = 30 \text{ V}$$

Beispiel 2:

(Netzwerk 3B)

Beim Netzwerk 3B sind durch Quellen-Umwandlung sämtliche Ströme und Spannungen zu bestimmen.

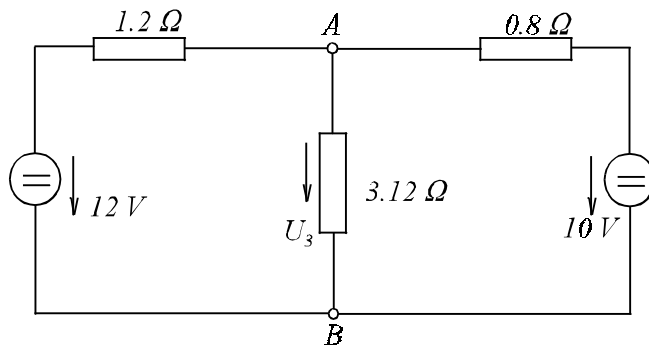
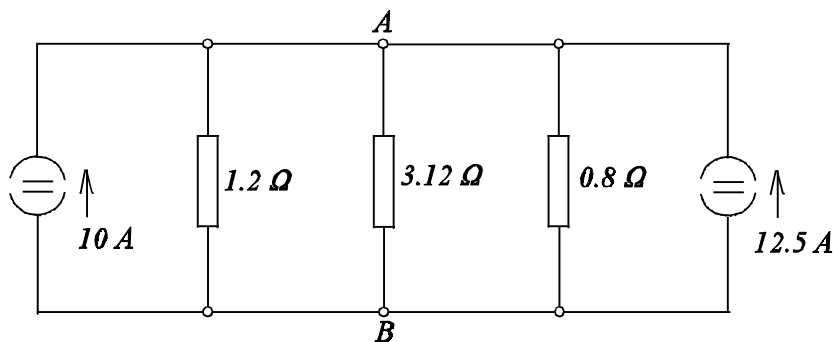


Bild EG3424E



$$10\text{ A} = \frac{12\text{ V}}{1.2\ \Omega}$$

$$12.5\text{ A} = \frac{10\text{ V}}{0.8\ \Omega}$$

Bild EG3424F

Möglichkeit 1: Beide Quellen zusammenfassen:

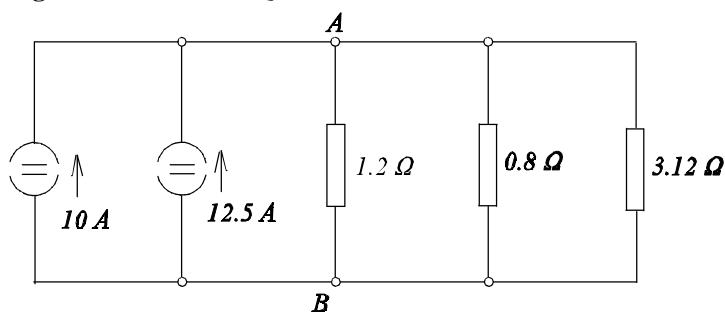


Bild EG3424G

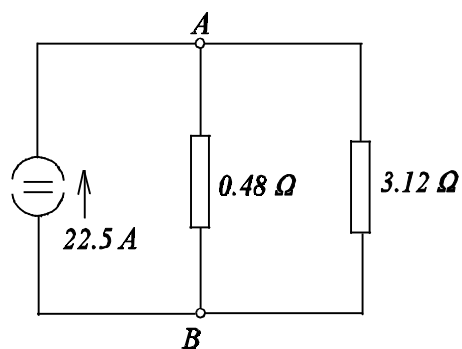
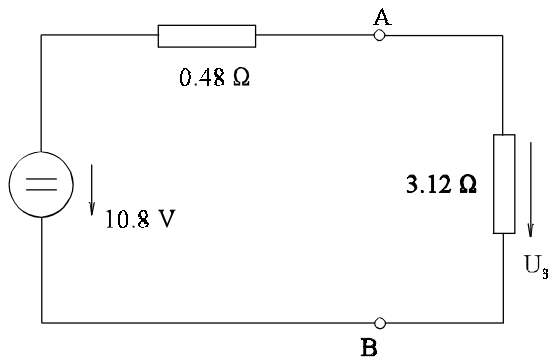


Bild EG3424H



$$10.8 \text{ V} = 22.5 \text{ A} \cdot 0.48 \Omega$$

Bild EG3424I

$$U_3 = 10.8 \text{ V} \frac{3.12 \Omega}{3.12 \Omega + 0.48 \Omega} = 9.36 \text{ V}$$

Hinweis: Werden die elektrischen Größen an nur einem Zweig gesucht, kann das restliche Netzwerk durch eine Quelle mit Innenwiderstand ersetzt werden. Dieses Verfahren soll im Abschnitt 3.6 gesondert behandelt werden.

Möglichkeit 2: Alle drei Widerstände und die beiden Quellen zusammenfassen.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{1.2 \Omega} + \frac{1}{0.8 \Omega} + \frac{1}{3.12 \Omega} \quad \Rightarrow \quad R = 0.416 \Omega$$

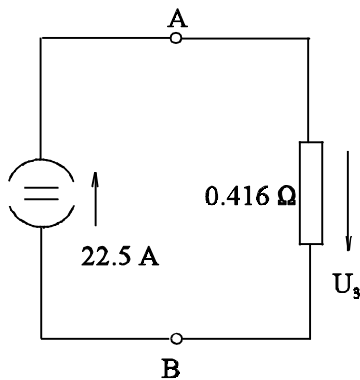


Bild EG3424J

$$U_3 = 22.5 \text{ A} \cdot 0.416 \Omega = 9.36 \text{ V}$$

Die nach zwei verschiedenen Möglichkeiten bestimmte Spannung U_3 kann in das Original-Netzwerk eingetragen werden. Alle anderen Ströme und Spannungen lassen sich dann mit Hilfe von ohmschen Gesetz, Maschen- und Knotenregeln bestimmen.

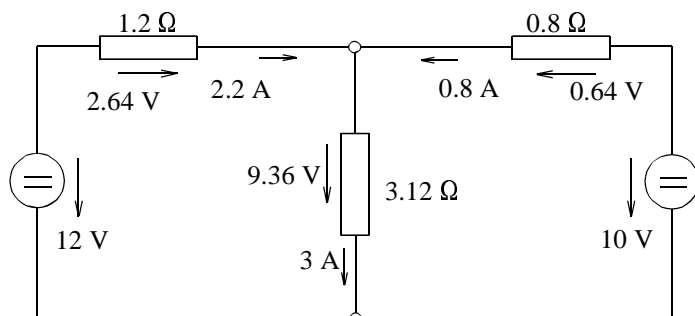
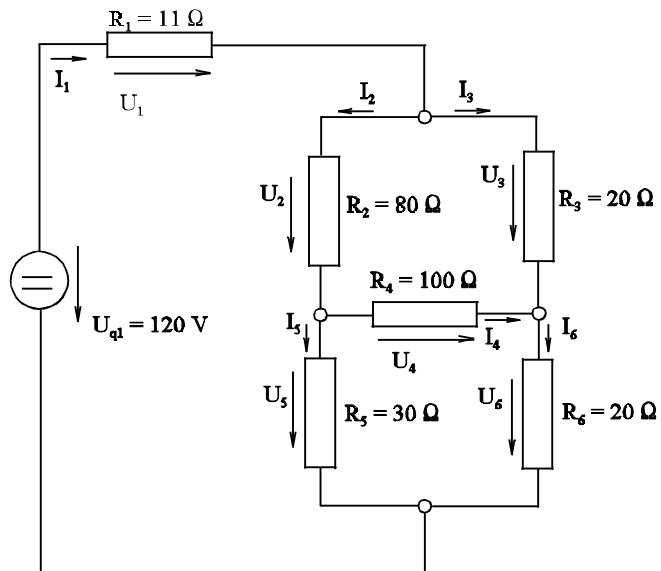


Bild EG3424K

3.4.3. Stern-Dreieck- und Dreieck-Stern-Umwandlung

3.4.3.1. Vorbetrachtung

Das Netzwerk 3D soll mit Hilfe von Umwandlungsmethoden berechnet werden, siehe Bild EGNET3D.



BildEGNET3D

Fazit: Mit Quellen-Umwandlung und Ersatzwiderstand kann das Netzwerk nicht gelöst werden. Es sind noch weitere Umwandlungs-Verfahren erforderlich.

3.4.3.2. Dreieck-Stern-Umwandlung

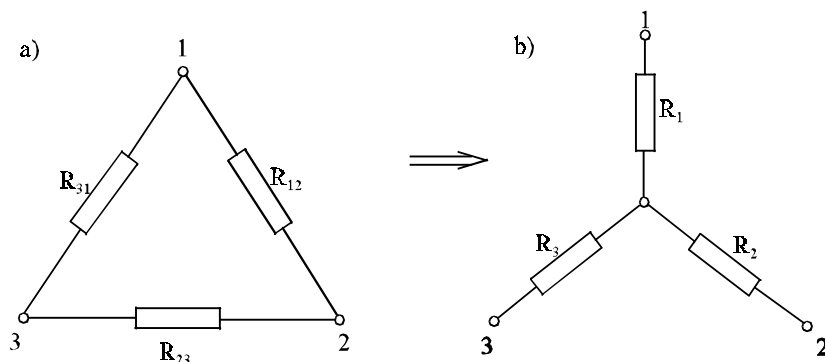


Bild EG3432A: a) Dreieck-Schaltung

b) Stern-Schaltung

Die beiden Schaltungen Stern und Dreieck nach Bild EG3432A sollen gegeneinander austauschbar sein. Wann ist dieses möglich? Antwort: Genau dann, wenn die Schaltungen nach außen hin das gleiche Verhalten aufweisen. Dieses muß für alle Betriebspunkte gelten. Es sind die drei Elemente (R_1 , R_2 und R_3) zu bestimmen. Drei zu bestimmende Elemente erfordern drei Bestimmungsgleichungen. Wenn die Umwandlung für alle Betriebspunkte gilt, muß die Umwandlung auch für drei bestimmte Betriebspunkte gelten. Aus diesen drei Betriebspunkten

ergeben sich drei Gleichungen. Wenn jeweils eine Klemme offen ist, kann der Widerstand der zwei restlichen Klemmen verglichen werden.

$$3 \text{ offen} \Rightarrow R_{12} \parallel (R_{23} + R_{31}) = R_1 + R_2 = \frac{R_{12} * R_{23} + R_{12} * R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$1 \text{ offen} \Rightarrow R_{23} \parallel (R_{12} + R_{31}) = R_2 + R_3 = \frac{R_{12} * R_{23} + R_{23} * R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$2 \text{ offen} \Rightarrow R_{31} \parallel (R_{12} + R_{23}) = R_1 + R_3 = \frac{R_{31} * R_{12} + R_{23} * R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Oberes Gleichungssystem für die Variablen R_1 , R_2 und R_3 kann in Matrix-Form geschrieben werden. Der Nenner der rechten Seite ist der gleiche. Der Zähler enthält die Produkte $R_{12} R_{23}$, $R_{23} R_{31}$ und $R_{31} R_{12}$. Diese Produkte werden als Vektor ebenfalls ausgeklammert:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{12} R_{31} \\ R_{12} R_{23} \\ R_{31} R_{23} \end{bmatrix}$$

Die Lösung erfolgt normalerweise durch Invertieren und Multiplizieren der oberen linken Matrix. Da aber auf der rechten Seite die gleiche Matrix vorhanden ist, ergibt auch dessen Inversion von links multipliziert die Einheitsmatrix. Die beiden Matrizen lassen sich kürzen, da die Determinante nicht null ist (ohne Beweis).

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \begin{bmatrix} R_{12} R_{31} \\ R_{12} R_{23} \\ R_{31} R_{23} \end{bmatrix}$$

Interpretation der oberen Formel:

Der Stern-Widerstand eines Zweiges ergibt sich, in dem die zwei anliegenden Dreieck-Widerstände miteinander multipliziert werden und durch die Summe der drei Dreieck-Widerstände dividiert werden.

Sonderfall bei gleichen Widerständen:

$$R_{\Delta} = R_{12} = R_{23} = R_{31}$$

$$R_y = R_1 = R_2 = R_3 = \frac{R_{\Delta} * R_{\Delta}}{R_{\Delta} + R_{\Delta} + R_{\Delta}}$$

$$R_y = \frac{R_{\Delta}}{3}$$

Beispiel: (Netzwerk 3D)

In der Vorbetrachtung (siehe Bild EGNET3D) war das Netzwerk 3D durch Umformung nicht lösbar. Die Widerstände R_2 , R_3 und R_4 bilden ein Dreieck, welches umzuformen ist, siehe Bild EG3432B.

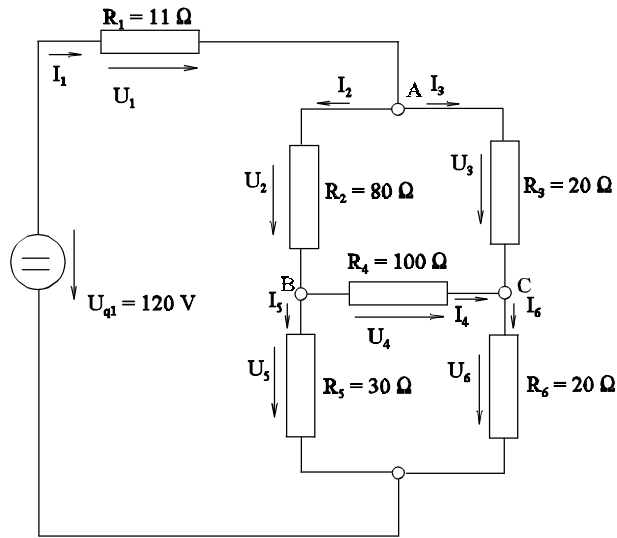


Bild EG3432B

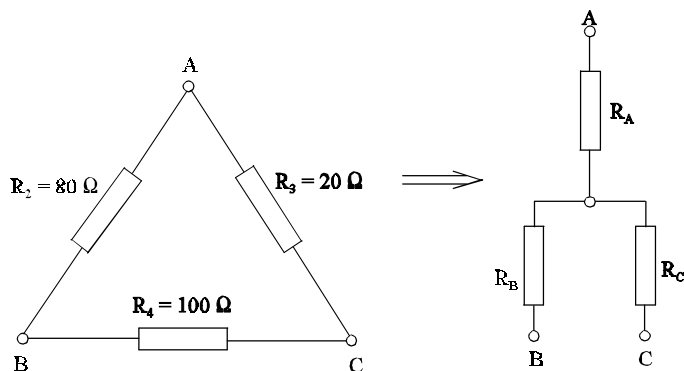


Bild EG3432C

$$\sum R = R_2 + R_3 + R_4 = 80 \, \Omega + 20 \, \Omega + 100 \, \Omega = 200 \, \Omega$$

$$R_A = \frac{R_2 * R_3}{\sum R} = \frac{80 \, \Omega * 20 \, \Omega}{200 \, \Omega} = 8 \, \Omega$$

$$R_B = \frac{R_2 * R_4}{\sum R} = \frac{80 \, \Omega * 100 \, \Omega}{200 \, \Omega} = 40 \, \Omega$$

$$R_C = \frac{R_4 * R_3}{\sum R} = \frac{100 \, \Omega * 20 \, \Omega}{200 \, \Omega} = 10 \, \Omega$$

Das Dreieck ABC in Bild EG3432B wird ersetzt durch das Stern-ESB in Bild EG3432C, siehe Bild EG3432D.

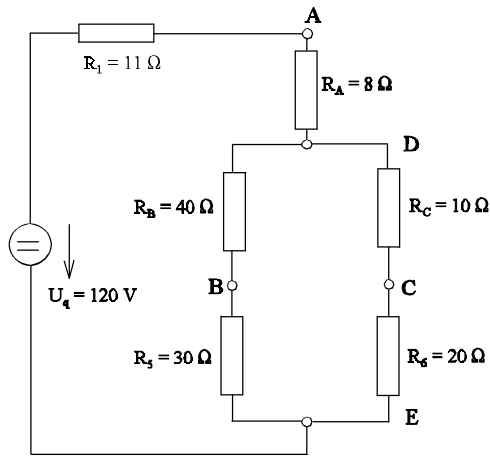


Bild EG3432D

Die Widerstände R_B , R_C , R_5 und R_6 in Bild EG3432D werden zu einem Ersatzwiderstand zusammengefaßt, siehe Bild EG3432E. Die Knotenpunkte B und C sind in Bild EG3432E nicht mehr vorhanden.

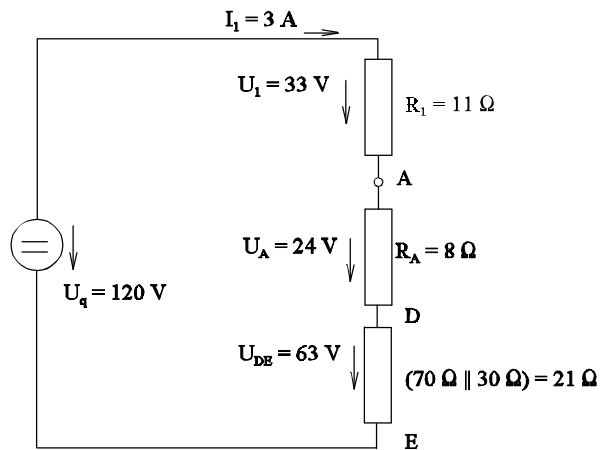


Bild EG3432E

$$I_1 = \frac{120 \text{ V}}{11 \, \Omega + 8 \, \Omega + 21 \, \Omega} = 3 \text{ A}$$

Aus Bild EG3432E lassen sich der Strom I_1 und die Spannung U_1 direkt bestimmen. Alle anderen Ströme und Spannungen aus Bild EG3432B sind in Bild EG3432E nicht vorhanden. Mit den Werten U_1 , I_1 in das Originalnetzwerk, Bild EG3432B, eingetragen lassen sich in diesem Fall die anderen Größen nicht berechnen. Es muß dazu eine Zwischen-Umwandlung aus Bild EG3432D nochmals berechnet werden, siehe Bild EG3432F. In Bild EG3432D/EG3432F sind die Widerstände R_5/R_6 Originalwiderstände. Die Spannung U_{DE} kann aus Bild EG3432E bestimmt werden und nach Bild EG3432F übertragen werden.

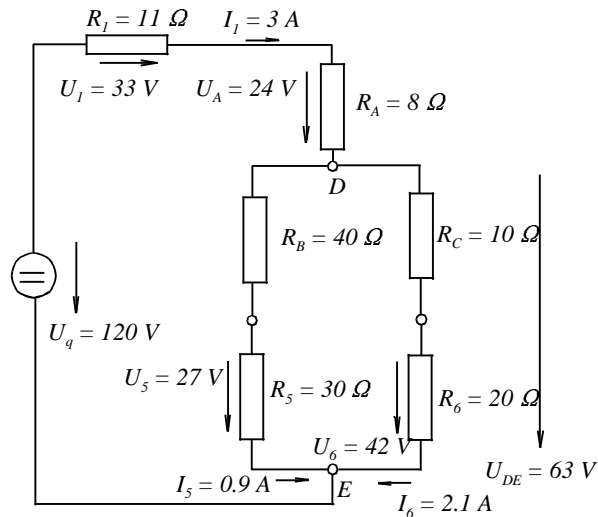


Bild EG3432F

Mit Hilfe von ohmschen Gesetz, Maschenumlauf und Spannungsteiler lassen sich die in Bild EG3432F eingetragenen Originalgrößen U_5 , I_5 , U_6 und I_6 berechnen. Mit diesen Information, eingetragen in Bild EG3432G, lassen sich nun alle Größen des Netzwerkes nach Bild EG3432G berechnen.

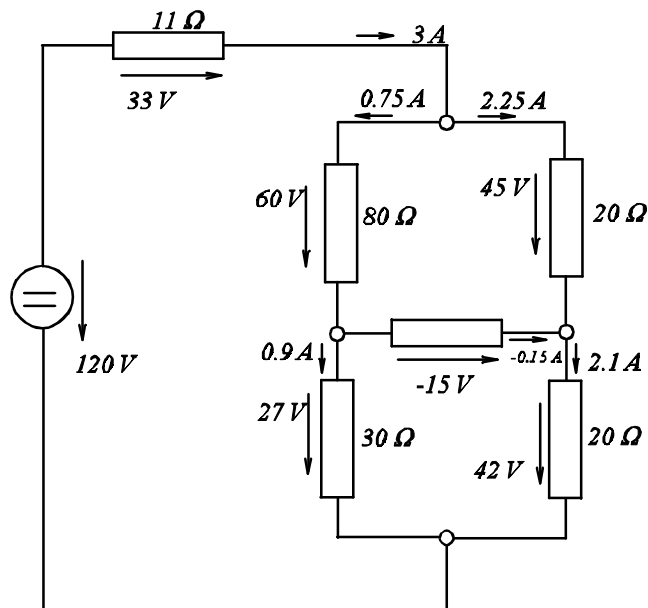


Bild EG3432G

Fazit: Bei einer Netzumwandlung bleiben einige Knotenpunkt erhalten, andere nicht.

3.4.3.3. Stern-Dreieck-Umwandlung

Bei der Dreieck-Stern-Umwandlung wurden drei Gleichungen aufgestellt für drei Betriebspunkte mit jeweils einer offenen Klemme. Dieses Gleichungssystem war für die Auflösung nach R_1 , R_2 , R_3 linear leicht auf lösbar. In dem Gleichungssystem waren aber auch die Dreieck-Widerstände R_{12} , R_{23} und R_{31} vorhanden. Die Auflösung des Gleichungssystems nach R_{12} , R_{23} und R_{31} ist nichtlinear und etwas aufwendiger. Für die Stern-Dreieck-Umwandlung nach Bild EG3433A ist das Ergebnis unten angegeben.

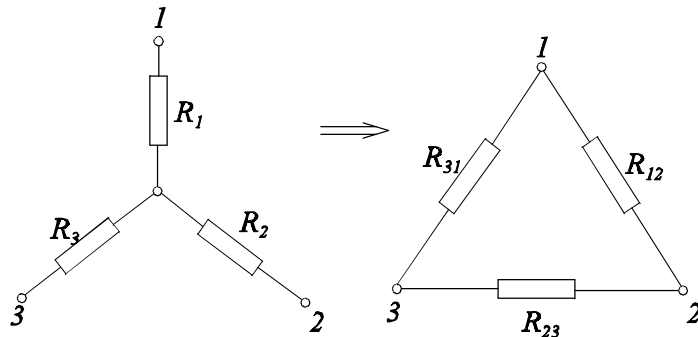


Bild EG3433A

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2}$$

Interpretation der Umwandlungs-Formel:

Um den Dreieck-Widerstand zwischen zwei Klemmen zu berechnen, werden die beiden anliegenden Stern-Widerstände addiert und dazu noch das Produkt der anliegenden Stern-Widerstände dividiert durch den gegenüberliegenden Stern-Widerstand.

Beispiel:

Das Netzwerk 3E, siehe Bild EG3433B, ist durch Stern-Dreieck-Umformung zu lösen.

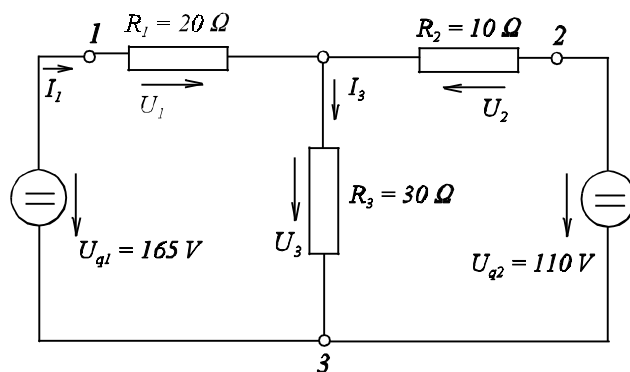


Bild EG3433B:

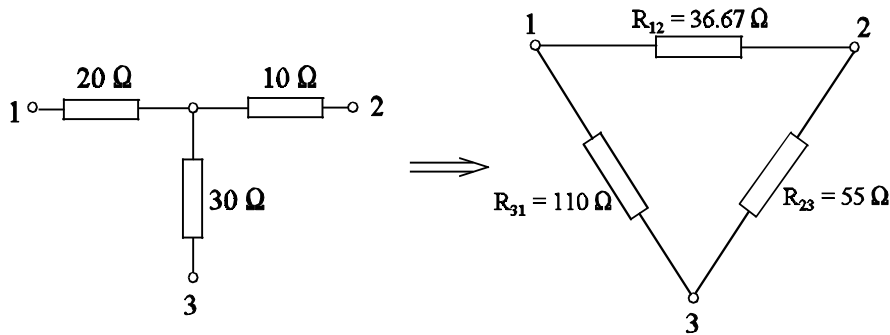


Bild EG3433C: Stern aus Netzwerk 3E

$$R_{12} = 20 \, \Omega + 10 \, \Omega + \frac{20 \, \Omega * 10 \, \Omega}{30 \, \Omega} = 36.67 \, \Omega$$

$$R_{31} = 20 \, \Omega + 30 \, \Omega + \frac{20 \, \Omega * 30 \, \Omega}{10 \, \Omega} = 110 \, \Omega$$

$$R_{23} = 30 \, \Omega + 10 \, \Omega + \frac{30 \, \Omega * 10 \, \Omega}{20 \, \Omega} = 55 \, \Omega$$

Einsetzen des Dreiecks aus Bild EG3433C in Netzwerk 3E (Bild EG3433B) ergibt das Bild EG3433D.

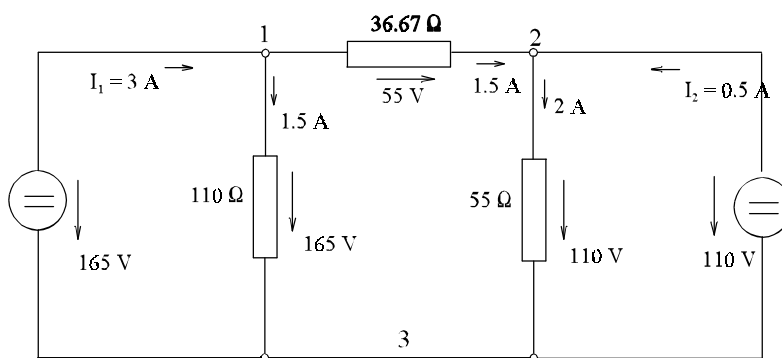


Bild EG3433D

Mit Hilfe des ohmschen Gesetzes, Maschenumlauf und Knotensumme können die Ströme I_1 und I_2 des Bildes EG3433D bestimmt werden. Die Größen I_1 und I_2 sind die einzigen Original-Netzwerkgrößen aus Bild EG3433B. Diese eingetragen in das Original-Netzwerk, lassen sich die restlichen Größen mit Hilfe des ohmschen Gesetzes, Knotensumme oder Maschenumlauf leicht berechnen, siehe Bild EG3433E.

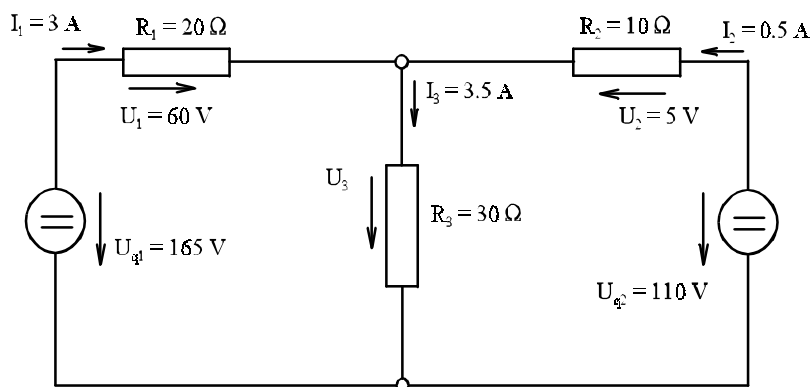
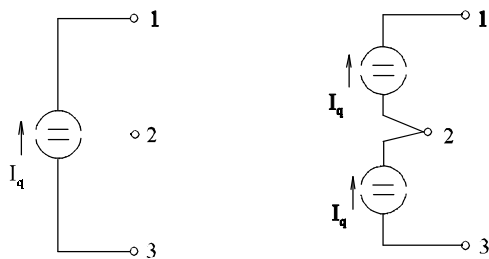


Bild EG3433E

3.4.4. Verlegung idealer Strom-Quellen

Prinzip:

Ein dritter Punkt, der von der Quelle nicht beeinflusst ist, bekommt einen zufließenden und einen rausfließenden Strom gleicher Größe, siehe Bild EG344A. Die Gleichung der Stromsumme dieses Knotens wird danach nicht verändert, weil der raus- und reinfließende Strom sich wieder aufheben.



$$\text{Knoten 2: } +I_q - I_q = 0$$

Bild EG344A

Beispiel:

Das Netzwerk 3K soll mit Umformungsmethoden gelöst werden.

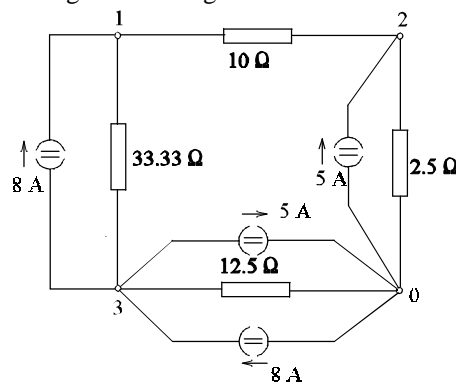
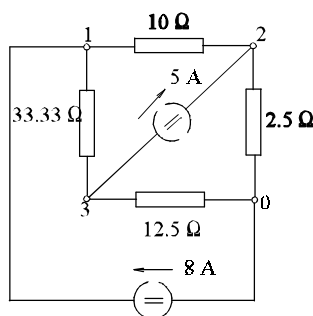
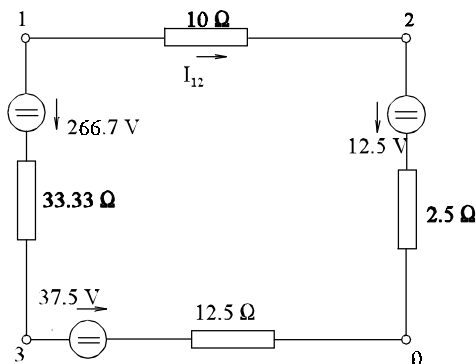


Bild EG344B

Bild EG344C



$$I_{12} = \frac{266.7 \text{ V} - 12.5 \text{ V} + 37.5 \text{ V}}{10 \Omega + 2.5 \Omega + 12.5 \Omega + 33.33 \Omega}$$

$$I_{12} = \frac{291.7 \text{ A}}{58.33 \Omega} = 5 \text{ A}$$

Bild EG344D

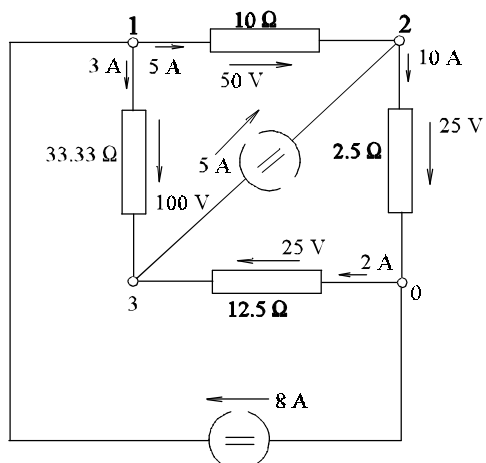


Bild EG344E

3.4.5. Umwandlung idealer Quellen

Eine ideale Spannungs-Quelle hat den Innenwiderstand Null, ebenso ist der Innenwiderstand einer idealen Strom-Quelle unendlich. Beim Maschenstrom-Verfahren wird gefordert, daß alle Strom-Quellen in Spannungs-Quellen umzurechnen sind, dieses ist bei idealen Quellen nicht möglich. Auch bei Netz-Umwandlung ist es u.U. nötig eine ideale Quelle umzuwandeln. Das Prinzip: Um endliche Werte zu bekommen, wird ein gedachter negativer Widerstand eingeführt.

3.4.5.1. Umwandlung idealer Spannungs-Quellen

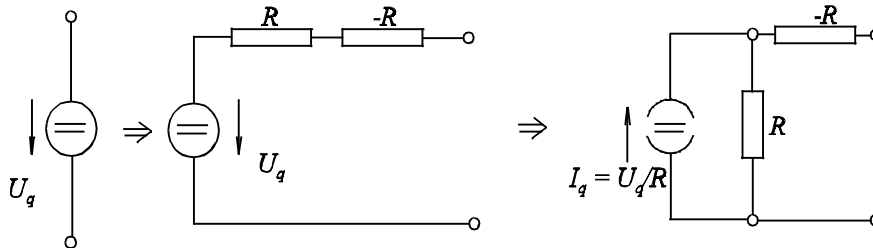


Bild EG3451A

Um den Widerstand Null zu erreichen, wird zum Widerstand R ein negativer Widerstand $-R$ des gleichen Betrages in Reihe geschaltet. Der Wert von R ist im Prinzip beliebig. Man wählt diesen in der Größenordnung der anderen im Netz vorhandenen Widerstände.

3.4.5.2. Umwandlung idealer Strom-Quellen

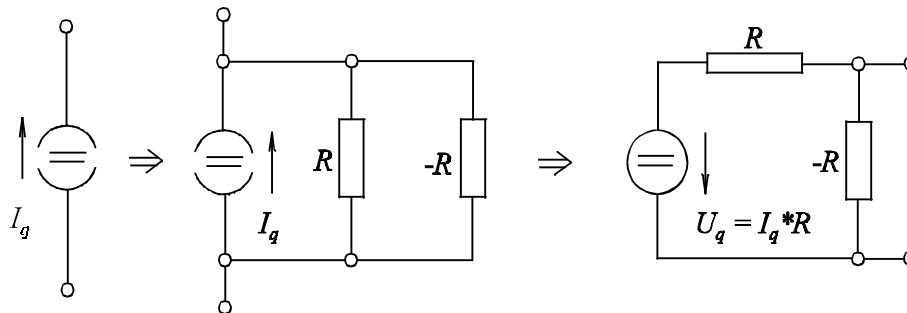


Bild EG3452A

Zur Strom-Quelle nach Bild EG3452A wird ein beliebiger Widerstand R parallel geschaltet. Damit sich der Gesamtleitwert Null ergibt, wird zum Widerstand R ein negativer Widerstand $-R$ des gleichen Betrages parallel geschaltet. Der Wert von R ist wieder beliebig wählbar, sollte aber in Größenordnung der anderen im Netz vorhandenen Widerstände sein.

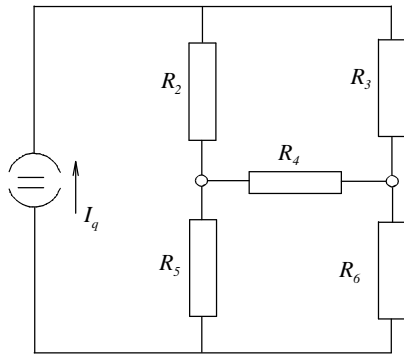
Beispiel:

Bild EG3452B

Für das obere Netzwerk, Bild EG3452B, ist ein Gleichungssystem nach dem Maschenstrom-Verfahren aufzustellen. Dazu ist es erforderlich die ideale Strom-Quelle des Bild EG3452B umzuwandeln, Ergebnis siehe in Bild EG3452C.

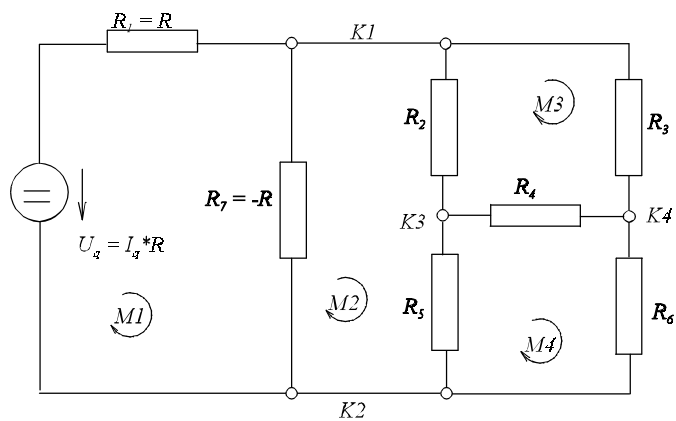


Bild EG3452C

Durch die Umwandlung ergibt sich ein weiterer Zweig, wodurch auch ein zusätzlicher Maschenstrom erforderlich ist.

$$z = 7 \qquad k = 4 \qquad m = z - (k - 1) = 7 - (4 - 1) = 4$$

	1'	2'	3'	4'		
1'	$R - R = 0$	$+R$	0	0	*	I_1'
2'	$+R$	$R_2 + R_5 - R$	$-R_2$	$-R_5$		I_2'
3'	0	$-R_2$	$R_2 + R_3 + R_4$	$-R_4$		I_3'
4'	0	$-R_5$	$-R_4$	$R_4 + R_5 + R_6$		I_4'
					=	$I_q \cdot R$
						0
						0
						0

3.5. Überlagerungssatz

Prinzip: Bei einem linearen Netzwerk lassen sich die Wirkungen der einzelnen Quellen überlagern.

gegeben: Netzwerk mit n-Quellen

Schema:

A] Für jede Quelle der n Quellen wird die Wirkung auf die einzelnen Größen Strom und Spannung in den Zweigen betrachtet. Dazu werden die eben nicht betrachteten Quellen wie folgt behandelt:

- nicht betrachtete ideale Spannungs-Quellen kurzschließen
- nicht betrachtete ideale Strom-Quellen öffnen

B] Die Wirkungen der einzelnen Quellen in den Zweigen überlagern, d.h. aufsummieren.

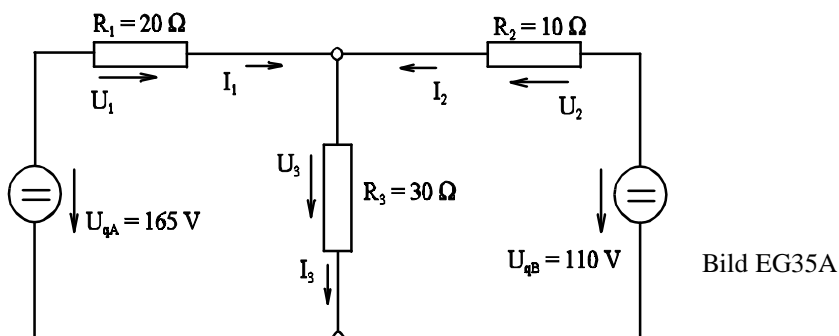
C] Die Quellen am besten mit den Indizes A, B, C, usw. durch numerieren.

Hinweis 1: Anstatt der mathematischen Überlagerung durch Addition, können auch die Wirkungen der einzelnen Quellen in verschiedenen Farben in das Original-Netzwerk eingezeichnet werden. Die Summe wird dann im Netzwerk durch Addition in einer weiteren Farben eingetragen.

Hinweis 2: Zur Ermittlung der Auswirkung einer Quelle können auch Netz-Umformungen vorgenommen werden (Ersatzwiderstand, Stern-Dreieck). Dann müssen mehrere ESBs pro Quelle gezeichnet werden.

Hinweis 3: Die Indizierung der Quellen mit A, B.. kann auch mit 1, 2 ... erfolgen. Bei alphabetischen Indizierung ist eine Vertauschung der Indizes erlaubt, da die Zweige numerische Indizierung aufweisen. Bei doppelter numerischer Indizierung ist auf die Reihenfolge der Indizes zu achten. Es kann auch die Überlagerung aus den n ESBs erfolgen, siehe Hinweis 1.

Beispiel 1: Das Netzwerk 3E ist mit Hilfe des Überlagerungs-Prinzip zu lösen, siehe Bild EG35A.



Auswirkung der Quelle A:

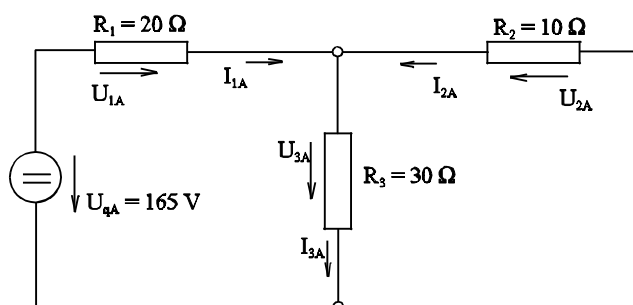


Bild EG35B

$$I_{1A} = \frac{U_{qA}}{R_1 + \frac{R_2 * R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{165 \text{ V}}{20 \Omega + \frac{10 \Omega * 30 \Omega}{10 \Omega + 30 \Omega}} = 6 \text{ A}$$

$$I_{3A} = I_{1A} * \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 6 \text{ A} * \frac{10 \Omega}{10 \Omega + 30 \Omega} = 1.5 \text{ A}$$

$$I_{2A} = I_{3A} - I_{1A} = 1.5 \text{ A} - 6 \text{ A} = -4.5 \text{ A}$$

$$U_{1A} = 120 \text{ V}$$

$$U_{2A} = -45 \text{ V}$$

$$U_{3A} = 45 \text{ V}$$

Auswirkung der Quelle B:

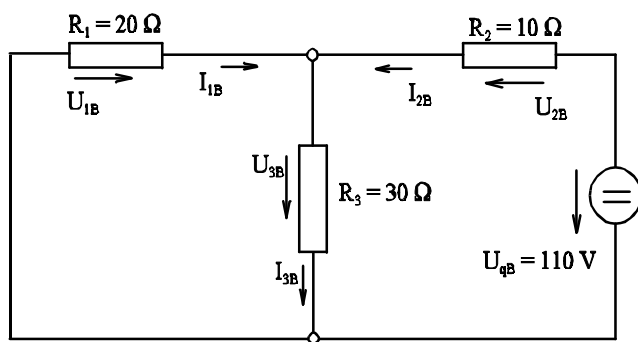


Bild EG35C

$$I_{2B} = \frac{U_{qB}}{R_2 + \frac{R_1 * R_3}{R_1 + R_3}} = \frac{110 \text{ V}}{10 \Omega + \frac{20 \Omega * 30 \Omega}{20 \Omega + 30 \Omega}} = 5 \text{ A}$$

$$I_{3B} = I_{2B} * \frac{R_1}{R_1 + R_3} = 5 \text{ A} * \frac{20 \Omega}{20 \Omega + 30 \Omega} = 2 \text{ A}$$

$$I_{1B} = I_{3B} - I_{2B} = 2 \text{ A} - 5 \text{ A} = -3 \text{ A}$$

$$U_{1B} = -60 \text{ V}$$

$$U_{2B} = 50 \text{ V}$$

$$U_{3B} = 60 \text{ V}$$

Überlagerung:

$$I_1 = I_{1A} + I_{1B} = 6 \text{ A} - 3 \text{ A} = 3 \text{ A}$$

$$I_2 = I_{2A} + I_{2B} = -4.5 \text{ A} + 5 \text{ A} = 0.5 \text{ A}$$

$$I_3 = I_{3A} + I_{3B} = 1.5 \text{ A} + 2 \text{ A} = 3.5 \text{ A}$$

$$U_1 = U_{1A} + U_{1B} = 120 \text{ V} - 60 \text{ V} = 60 \text{ V}$$

$$U_2 = U_{2A} + U_{2B} = -45 \text{ V} + 50 \text{ V} = 5 \text{ V}$$

$$U_3 = U_{3A} + U_{3B} = 45 \text{ V} + 60 \text{ V} = 105 \text{ V}$$

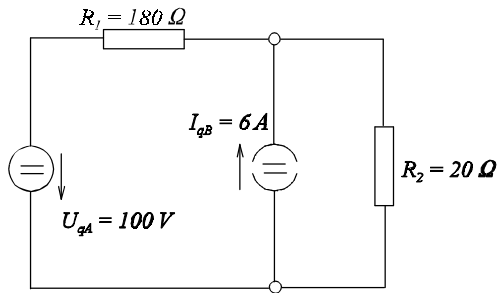
Beispiel 2:

Bild EG35D

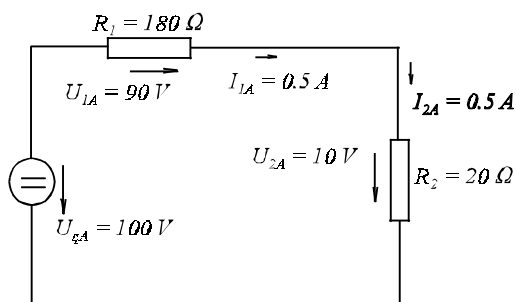
Auswirkung der Quelle A:

Bild EG35E

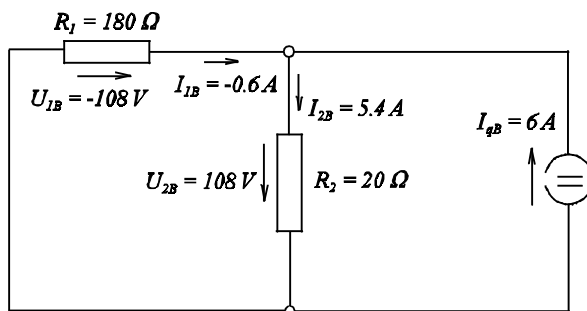
Auswirkung der Quelle B:

Bild EG35B

$$I_{2B} = I_{qB} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 6 \text{ A} \cdot \frac{180 \Omega}{180 \Omega + 20 \Omega} = 5.4 \text{ A}$$

Überlagerung der Quellen A und B:

$$I_1 = I_{1A} + I_{1B} = 0.5 \text{ A} - 0.6 \text{ A} = -0.1 \text{ A}$$

$$I_2 = I_{2A} + I_{2B} = 0.5 \text{ A} + 5.4 \text{ A} = 5.9 \text{ A}$$

$$U_1 = U_{1A} + U_{1B} = 90 \text{ V} - 108 \text{ V} = -18 \text{ V}$$

$$U_2 = U_{2A} + U_{2B} = 10 \text{ V} + 108 \text{ V} = 118 \text{ V}$$

3.6. Ersatzquelle

3.6.1. Theorie

Ist bei einem Netzwerk nur ein bestimmter Zweig von Interesse, kann das Gleichungssystem der Dimension z aufgeteilt werden:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline M_{11} & M_{12} & M_{13} & \dots & \dots & M_{1z} \\ \hline M_{21} & M_{22} & M_{23} & \dots & \dots & M_{2z} \\ \hline M_{31} & M_{32} & M_{33} & \dots & \dots & M_{3z} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline M_{z1} & M_{z2} & M_{z3} & \dots & \dots & M_{zz} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline I_1 \\ \hline I_2 \\ \hline I_3 \\ \hline \dots \\ \hline \dots \\ \hline I_z \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline U_{q1} \\ \hline U_{q2} \\ \hline U_{q3} \\ \hline \dots \\ \hline \dots \\ \hline U_{qz} \\ \hline \end{array}$$

$$\bar{M} * \bar{I} = \bar{U}_q \quad (A)$$

Gesucht ist der Strom im Zweig 1. Die obere Matrix und die zwei Vektoren werden aufgeteilt:

$$\bar{M} = \begin{array}{|c|c|} \hline R_1 & \bar{M}_{12} \\ \hline \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} \\ \hline \end{array} \quad \bar{I} = \begin{array}{|c|} \hline I_1 \\ \hline \bar{I}_2 \\ \hline \end{array} \quad \bar{U}_q = \begin{array}{|c|} \hline U_{q1} \\ \hline \bar{U}_{q2} \\ \hline \end{array} \quad (B)$$

Die neuen Teilmatrizen und Vektoren sind:

$$\bar{I}_2 = \begin{array}{|c|} \hline I_2 \\ \hline I_3 \\ \hline \dots \\ \hline \dots \\ \hline I_z \\ \hline \end{array} \quad \bar{U}_{q2} = \begin{array}{|c|} \hline U_{q2} \\ \hline U_{q3} \\ \hline \dots \\ \hline \dots \\ \hline U_{qz} \\ \hline \end{array} \quad \bar{M}_{22} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline M_{22} & M_{23} & \dots & \dots & M_{2z} \\ \hline M_{32} & M_{33} & \dots & \dots & M_{3z} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline M_{z2} & M_{z3} & \dots & \dots & M_{zz} \\ \hline \end{array} \quad \bar{M}_{21} = \begin{array}{|c|} \hline M_{21} \\ \hline M_{31} \\ \hline \dots \\ \hline \dots \\ \hline M_{z1} \\ \hline \end{array}$$

ergibt die Aufspaltung des oberen Gleichungssystem

$$\bar{M}_{12} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline M_{12} & M_{13} & \dots & \dots & M_{1z} \\ \hline \end{array}$$

Einsetzen von (B) in (A) ergibt:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline R_1 & \bar{M}_{12} \\ \hline \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline I_1 \\ \hline \bar{I}_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline U_{q1} \\ \hline \bar{U}_{q2} \\ \hline \end{array} \quad (C)$$

Die Gleichung (C) lässt sich ausmultiplizieren:

$$R_1 * I_1 + \bar{M}_{12} * \bar{I}_2 = U_{q1} \quad (D)$$

$$\bar{M}_{21} * I_1 + \bar{M}_{22} * \bar{I}_2 = \bar{U}_{q2} \quad (E)$$

Die oberen zwei Gleichungen (D) und (E) bilden ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten, dem Strom I_1 und dem Vektor \bar{I}_2 . Durch Einsetzen von \bar{I}_2 soll I_1 bestimmt werden. Die Gleichung (E) wird nach \bar{I}_2 aufgelöst

$$\bar{I}_2 = \bar{M}_{22}^{-1}(\bar{U}_{q2} - \bar{M}_{21} * I_1)$$

und in (D) eingesetzt:

$$R_1 * I_1 + \bar{M}_{12} * \bar{M}_{22}^{-1}(\bar{U}_{q2} - \bar{M}_{21} * I_1) = U_{q1}$$

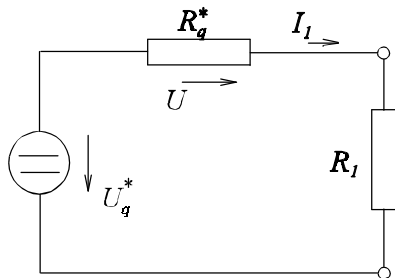
Ausmultipliziert, geordnet und nach I_1 ausgeklammert ergibt sich:

$$(R_1 - \bar{M}_{12} * \bar{M}_{22}^{-1} * \bar{M}_{21}) I_1 = U_{q1} - \bar{M}_{12} * \bar{M}_{22}^{-1} * \bar{U}_{q2} \quad (F)$$

Mit $R_q^* = \bar{M}_{12} * \bar{M}_{22}^{-1} * \bar{M}_{21}$ und $U_q^* = U_{q1} - \bar{M}_{12} * \bar{M}_{22}^{-1} * \bar{U}_{q2}$

läßt sich die Gleichung (F) schreiben als: $(R_1 + R_q^*) I_1 = U_q^*$

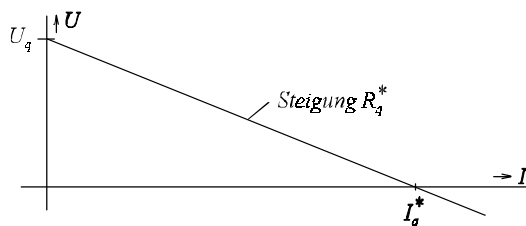
Das ist genau die Gleichung die man erhält, wenn man den Widerstand R_1 im Zweig "1" an eine Spannungs-Quelle U_q^* mit Innenwiderstand R_q^* anschließt, siehe Bild EG361A.



$$I_1 = \frac{U_q^*}{R_q^* + R_1}$$

Bild EG361A

Die Methode der Herleitung über die Matrizen-Rechnung ist zwar möglich, aber sehr aufwendig. Gesucht war eine Methode um einen Zweig möglichst schnell zu berechnen. Die Ableitung über die Matrizen-Rechnung war nur der Beweis, daß bei einem linearen Netzwerk bei Herausnahme eines Zweiges, das Restnetzwerk sich durch Spannungs-Quelle mit Innenwiderstände darstellen läßt. Eine Spannungsquelle ist durch Leerlaufspannung U_q^* und Innenwiderstand R_q^* eindeutig bestimmt. Die Methode der Ersatzquelle beruht darauf, die Daten einer Ersatz-Quelle zu bestimmen.



$$I_q^* = \frac{U_q^*}{R_q^*}$$

Bild EG361B

Nach Bild EG361B ist eine Spannungs-Quelle gekennzeichnet durch die drei Größen

U_q^* - Leerlaufspannungen

I_q^* - Kurzschlußstrom

R_q^* - Innenwiderstand,

wobei die drei Größen über die Formel

$$U_q^* = R_q^* * I_q^*$$

verknüpft sind. D.h. die Ersatz-Spannungs-Quelle ist durch zwei der drei oberen Größen eindeutig bestimmt.

3.6.2. Schema zu Ersatz-Spannungs-Quelle

A] Widerstand R_j des zu bestimmenden Zweiges j herausnehmen.

B] Für das verbleibendes Netzwerk werden zwei der folgenden drei Größen bestimmt (immer die beiden einfachsten auswählen):

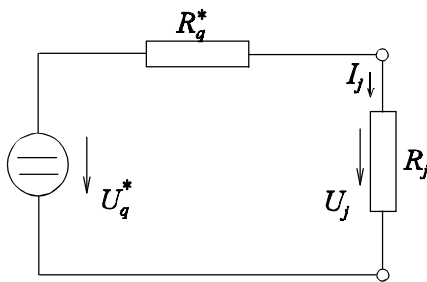
U_q^* - Leerlaufspannungen an den Klemmen des herausgenommenen Zweiges

I_q^* - Kurzschlußstrom an den Klemmen des herausgenommenen Zweiges

R_q^* - Innenwiderstand, den man sieht an den Klemmen. Dazu alle idealen Spannungs-Quellen kurzschließen und alle idealen Strom-Quellen öffnen.

- dritte Größe berechnen $U_q^* = R_q^* \cdot I_q^*$
- Hinweis: Evtl. ist zur Bestimmung je ein ESB erforderlich.

C] ESB: oder Formel für I_j



$$I_j = \frac{U_q^*}{R_q^* + R_j}$$

Bild EG362A

3.6.3. Beispiele**Beispiel 1:**

Netzwerk3B

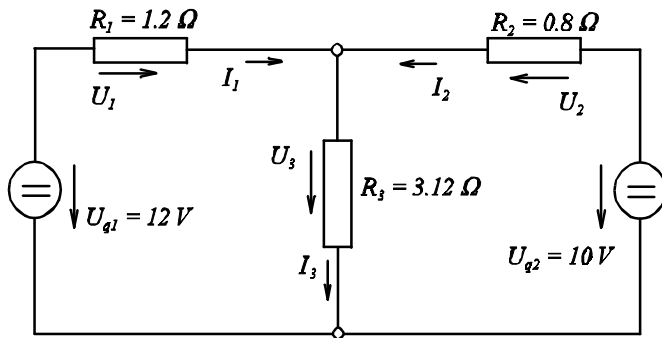
gesucht: I_3 

Bild EGNET3B

Frage: Welche zwei der drei Größen sind hier am schnellsten zu berechnen? Antwort: Kurzschlußstrom und Innenwiderstand.

Kurzschluß über R_3 ergibt:

$$I_q^* = \frac{12 \text{ V}}{1.2 \Omega} + \frac{10 \text{ V}}{0.8 \Omega} = 10 \text{ A} + 12.5 \text{ A} = 22.5 \text{ A}$$

$$R_q^* = 1.2 \Omega \parallel 0.8 \Omega = \frac{1.2 \Omega \cdot 0.8 \Omega}{1.2 \Omega + 0.8 \Omega} = 0.48 \Omega$$

$$U_q^* = R_q^* I_q^* = 0.48 \Omega \cdot 22.5 \text{ A} = 10.8 \text{ V}$$

$$I_3 = \frac{U_q^*}{R_q^* + R_3} = \frac{10.8 \text{ V}}{0.48 \Omega + 3.12 \Omega} = 3 \text{ A}$$

Beispiel 2:

(Netzwerk 3E)

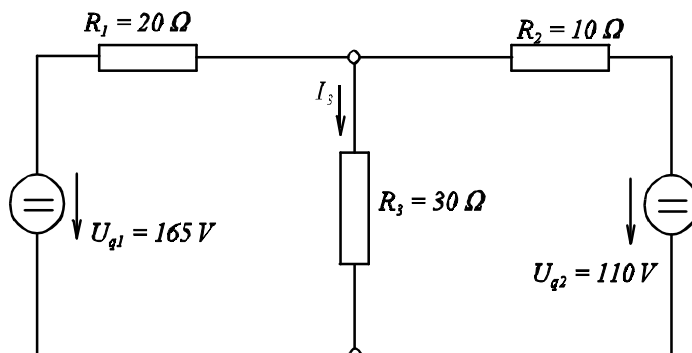
gesucht: I_3 

Bild EGNET3E

$$I_q^* = \frac{165 \text{ V}}{20 \Omega} + \frac{110 \text{ V}}{10 \Omega} = 19.25 \text{ A}$$

$$R_q^* = \frac{20 \Omega \cdot 10 \Omega}{20 \Omega + 10 \Omega} = 6.667 \Omega$$

$$U_q^* = R_q^* I_q^* = 6.667 \Omega \cdot 19.25 \text{ A} = 128.3 \text{ V}$$

$$I_3 = \frac{U_q^*}{R_q^* + R_3} = \frac{128.3 \text{ V}}{6.667 \Omega + 30 \Omega} = 3.5 \text{ A}$$

Beispiel 3: (Beispiel-Netzwerk)
gesucht: I_3

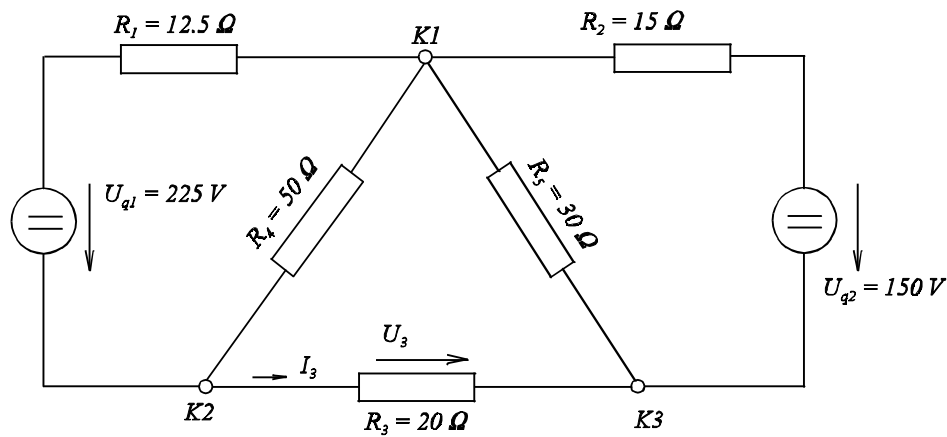


Bild EGNET3A

ESB für R_q^* :

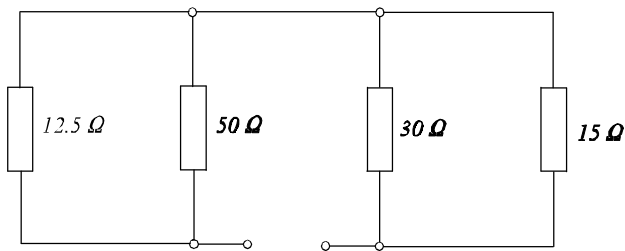


Bild EG363A

$$R_q^* = \frac{12.5\,\Omega \cdot 50\,\Omega}{12.5\,\Omega + 50\,\Omega} + \frac{30\,\Omega \cdot 15\,\Omega}{30\,\Omega + 15\,\Omega} = 10\,\Omega + 10\,\Omega = 20\,\Omega$$

ESB für U_q^* :

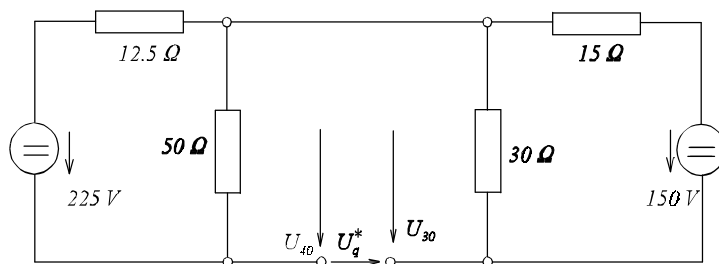


Bild EG363B

$$U_{40} = 225\,\text{V} \frac{50\,\Omega}{50\,\Omega + 12.5\,\Omega} = 180\,\text{V}$$

$$U_{30} = 150\,\text{V} \frac{30\,\Omega}{30\,\Omega + 15\,\Omega} = 100\,\text{V}$$

$$U_q^* = -U_{40} + U_{30} = -180\,\text{V} + 100\,\text{V} = -80\,\text{V}$$

$$I_3 = \frac{U_q^*}{R_q^* + R_3} = \frac{-80\,\text{V}}{20\,\Omega + 20\,\Omega} = -2\,\text{A}$$

3.7. Knotenpunkt-Potential-Verfahren

3.7.1. Einführung von Knotenpunkt-Potentialen

Was ist ein Potential ? Jedem Punkt (Knotenpunkt) wird ein Potential zugeordnet. Was ist nun die Spannung? Die Spannung zwischen zwei Punkten ist die Differenz der Potentiale zwischen beiden Punkten. Ein Beispiel für Potential, Spannungs- und Strom-Berechnung, siehe Bild EG371A.

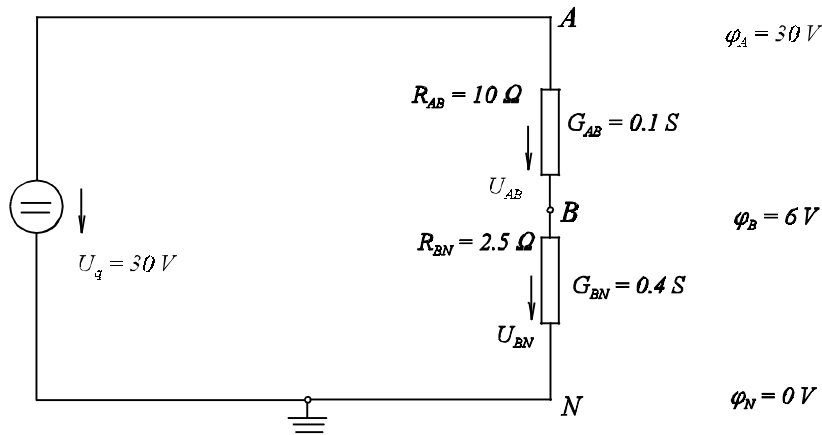


Bild EG371A

Ein Knoten, der Knoten "N" oder "0" bekommt willkürlich das Potential $\varphi_N = 0 \text{ V}$ oder $\varphi_0 = 0 \text{ V}$

Die Spannungen an den Zweigen ergeben sich durch Differenz der Potentiale:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = 30 \text{ V} - 6 \text{ V} = 24 \text{ V}$$

$$U_{BN} = \varphi_B - \varphi_N = 6 \text{ V} - 0 \text{ V} = 6 \text{ V}$$

$$U_{AN} = \varphi_A - \varphi_N = 30 \text{ V} - 0 \text{ V} = 30 \text{ V}$$

Die Ströme lassen sich mit Hilfe des Produktes aus Leitwert und Potentialdifferenz berechnen:

$$I_{AB} = G_{AB} \cdot U_{AB} = G_{AB} \cdot (\varphi_A - \varphi_B)$$

$$I_{BN} = G_{BN} \cdot U_{BN} = G_{BN} \cdot (\varphi_B - \varphi_N) = G_{BN} \cdot \varphi_B \quad (\varphi_N = 0)$$

Wenn ein Knoten, der Knoten "N", das Potential Null aufweist, braucht das Potential nicht berücksichtigt werden.

Stromverlauf bei Potential:

Außerhalb der Spannungs-Quelle fließt der Strom von höheren Potential zum niedrigen Potential. Gibt ein Netzelement (Quelle) Leistung ab, fließt der Strom vom niedrigen Potential zum höheren Potential.

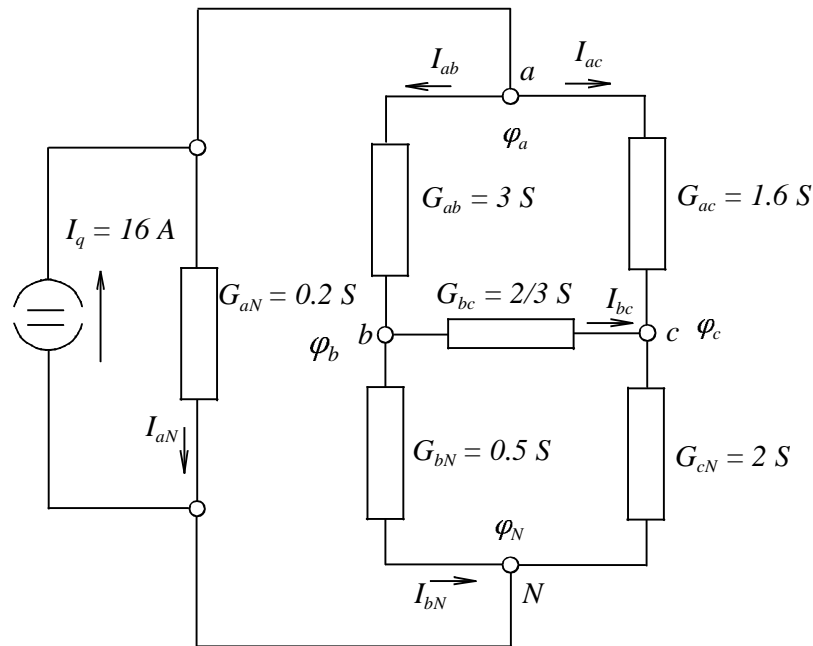
3.7.2. Ableitung des Knotenpunkt-Potential-Verfahrens am Beispiel Netzwerk 3J

Bild EG372A: Netzwerk 3J

Nach Kap. 3.7.1 und Bild EG372A ergeben sich die Zweigströme in den Widerständen:

$$I_{aN} = G_{aN} \cdot \varphi_a \quad (1)$$

$$I_{ab} = G_{ab} \cdot (\varphi_a - \varphi_b) \quad (2)$$

$$I_{ac} = G_{ac} \cdot (\varphi_a - \varphi_c) \quad (3)$$

$$I_{bc} = G_{bc} \cdot (\varphi_b - \varphi_c) \quad (4)$$

$$I_{bN} = G_{bN} \cdot \varphi_b \quad (5)$$

$$I_{cN} = G_{cN} \cdot \varphi_c \quad (6)$$

Die Zweigströme (1) bis (6) sind durch die drei noch zu bestimmenden Potentiale φ_a , φ_b und φ_c eindeutig beschreibbar. Gesucht ist ein Gleichungssystem für die drei Variablen φ_a , φ_b und φ_c . Das Knotenpunkt-Potential-Verfahren ist das Analogon zum Maschenstrom-Verfahren. Hier wurde das Gleichungssystem für Maschenströme über die Maschenumläufe aufgestellt. Beim Knotenpunkt-Potential-Verfahren wird nun das Gleichungssystem mit Hilfe von Knotensummen aufgestellt. Für das obere Beispiel ergeben sich die drei Knotensummen (für vier Knoten):

$$\text{Knoten a:} \quad I_{ab} + I_{ac} + I_{aN} = I_q \quad (7)$$

$$\text{Knoten b:} \quad -I_{ab} + I_{bc} + I_{bN} = 0 \quad (8)$$

$$\text{Knoten c:} \quad -I_{ac} - I_{bc} + I_{cN} = 0 \quad (9)$$

Das Ersetzen der Ströme in (7) bis (9) durch (1) bis (6) ergibt die Knotensumme in Abhängigkeit der drei Potentiale φ_a , φ_b und φ_c und der Leitwerte:

$$G_{ab} \cdot (\varphi_a - \varphi_b) + G_{ac} \cdot (\varphi_a - \varphi_c) + G_{aN} \cdot \varphi_a = I_q \quad (10)$$

$$-G_{ab} \cdot (\varphi_a - \varphi_b) + G_{bc} \cdot (\varphi_b - \varphi_c) + G_{bN} \cdot \varphi_b = 0 \quad (11)$$

$$-G_{ac} \cdot (\varphi_a - \varphi_c) - G_{bc} \cdot (\varphi_b - \varphi_c) + G_{cN} \cdot \varphi_c = 0 \quad (12)$$

Damit sind die drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Variablen φ_a , φ_b und φ_c gefunden. Das Gleichungssystem (10) bis (12) wird ausmultipliziert und in eine Matrizen-Schreibweise umgeformt:

$$\begin{array}{c}
 \varphi_a \quad \quad \quad \varphi_b \quad \quad \quad \varphi_c \\
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 a & G_{ab} + G_{ac} + G_{aN} & -G_{ab} & -G_{ac} \\
 \hline
 b & -G_{ab} & G_{ab} + G_{bc} + G_{bN} & -G_{bc} \\
 \hline
 c & -G_{ac} & -G_{bc} & G_{ac} + G_{bc} + G_{cN} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \varphi_a \\
 \hline
 \varphi_b \\
 \hline
 \varphi_c \\
 \hline
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 I_a \\
 \hline
 0 \\
 \hline
 0 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad (13)$$

Aus dem Gleichungssystem (13) sind die Regeln für das Knotenpunkt-Potentialverfahren zu erkennen:

- In der Hauptdiagonale werden die an einem Knoten angeschlossenen Leitwerte positiv addiert.
- In den Nebenelementen werden die Leitwerte zwischen zwei Knoten als Koppelung negativ eintragen.
- In dem Anregungsvektor (Stromquellenvektor) ist die Summe der in einem Knoten rein fließenden Ströme von Stromquellen enthalten. Rausfließende Ströme müssen negativ addiert werden.

Zahlen-Beispiel für Netzwerk 3J:

$$\begin{array}{c}
 \varphi_a \quad \quad \quad \varphi_b \quad \quad \quad \varphi_c \\
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 a & 0.2S + 3S + 1.6S & -3S & -1.6S \\
 \hline
 b & -3S & 3S + 0.5S + 0.666S & -0.666S \\
 \hline
 c & -1.6S & -0.666S & 1.6S + 2S + 0.666S \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \varphi_a \\
 \hline
 \varphi_b \\
 \hline
 \varphi_c \\
 \hline
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 16A \\
 \hline
 0 \\
 \hline
 0 \\
 \hline
 \end{array}$$

Normiert auf $G_{\text{Norm}} = 1S$, $\varphi_{\text{Norm}} = U_{\text{Norm}} = 1V$ und $I_{\text{Norm}} = 1A$ läßt sich oberes Gleichungssystem angeben:

$$\begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 4.8 & -3 & -1.6 \\
 \hline
 -3 & 4.1667 & -0.6667 \\
 \hline
 -1.6 & -0.6667 & 4.267 \\
 \hline
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \varphi_a^N \\
 \hline
 \varphi_b^N \\
 \hline
 \varphi_c^N \\
 \hline
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 16 \\
 \hline
 0 \\
 \hline
 0 \\
 \hline
 \end{array}$$

Die numerische Lösung des oberen Gleichungssystem ergibt:

$$\varphi_a^N = 10$$

$$\varphi_b^N = 8$$

$$\varphi_c^N = 5$$

Die Entnormierung wird vorgenommen:

$$\varphi_a = 10 \text{ V}$$

$$\varphi_b = 8 \text{ V}$$

$$\varphi_c = 5 \text{ V}$$

Die Spannungen lassen sich mit Hilfe der Potentiale berechnen:

$$U_{aN} = \varphi_a = 10 \text{ V}$$

$$U_{bN} = \varphi_b = 8 \text{ V}$$

$$U_{cN} = \varphi_c = 5 \text{ V}$$

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = 10 \text{ V} - 8 \text{ V} = 2 \text{ V}$$

$$U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c = 10 \text{ V} - 5 \text{ V} = 5 \text{ V}$$

$$U_{bc} = \varphi_b - \varphi_c = 8 \text{ V} - 5 \text{ V} = 3 \text{ V}$$

Die Zweigströme können noch mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes bestimmt werden.

3.7.3. Schema zum manuellen Knotenpunkt-Potential-Verfahren

gegeben: Netzwerk mit k-Knoten und z-Zweigen

A] Einem Knoten, dem Knoten "0" wird das Potential $\varphi_0 = 0V$ zugeordnet.

B] Die anderen k - 1 Knoten bekommen das Potential
 $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_{k-1}$

C] Sämtliche Spannungs-Quellen im Strom-Quellen umwandeln.

D] Widerstände in Leitwerte angeben.

E] Gleichungssystem für die Potentiale
 $\varphi_1, \varphi_2 \dots, \varphi_{k-1}$

aufstellen: $\bar{G}' * \bar{\varphi} = \bar{I}'_q$

F] Matrix-Hauptdiagonale:
 Alle von Knoten abgehenden Leitwerte positiv aufsummieren.
 Matrix-Nebenelemente:
 G_{ij} , den Leitwert der Verbindung zwischen Knoten i und Knoten j negativ eintragen.
 Anregungs-Vektor:
 Die Ströme der Strom-Quellen an dem jeweiligen Knoten aufsummieren (reinfließend ist positiv und rausfließend ist negativ).

G] Normieren

H] Gleichungssystem lösen

I] Entnormieren

J] Spannungen aus Potential-Differenzen berechnen.

K] Ströme berechnen

L] Evtl. Strom-Quellen zurückwandeln

M] Probe

Beispiel: (Netzwerk 3K)

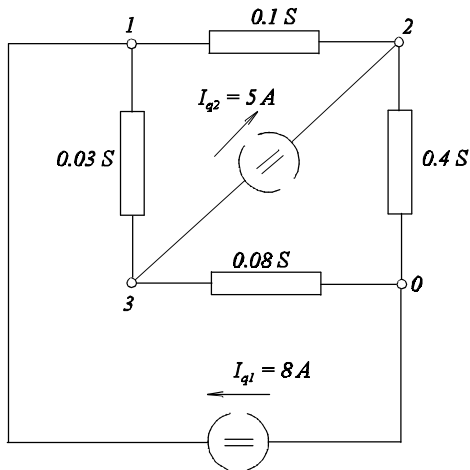


Bild EGNET3K

	1	2	3
1	$0.1S+0.03S$	$-0.1S$	$-0.03S$
2	$-0.1S$	$0.1S+0.4S$	0
3	$-0.03S$	0	$0.08S+0.03S$

$$\begin{matrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{matrix} = \begin{matrix} 8A \\ 5A \\ -5A \end{matrix}$$

$G_{\text{norm}} = 1S$, $\varphi_{\text{Norm}} = U_{\text{Norm}} = 1V$ und $I_{\text{Norm}} = 1A$

0.13	-0.1	-0.03
-0.1	0.5	0
-0.03	0	0.11

$$\begin{matrix} \varphi_1^N \\ \varphi_2^N \\ \varphi_3^N \end{matrix} = \begin{matrix} 8 \\ 5 \\ -5 \end{matrix}$$

Ergebnis: $\varphi_1^N = 75$ $\varphi_2^N = 25$ $\varphi_3^N = -25$

Entnormierung: $\varphi_1 = 75 \text{ V}$ $\varphi_2 = 25 \text{ V}$ $\varphi_3 = -25 \text{ V}$

$$U_{13} = \varphi_1 - \varphi_3 = 75 \text{ V} - (-25) \text{ V} = 100 \text{ V}$$

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 75 \text{ V} - 25 \text{ V} = 50 \text{ V}$$

$$U_{20} = \varphi_2 - 0 = 25 \text{ V}$$

$$U_{30} = \varphi_3 - 0 = -25 \text{ V}$$

Netzwerk 3N

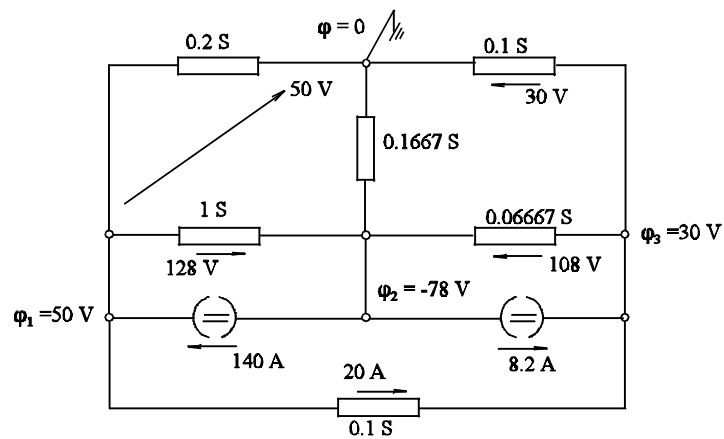


Bild EG373A

	1	2	3
1	1.3	-1	-0.1
2	-1	1.233	-0.06667
3	-0.1	-0.06667	0.2667

$$\begin{matrix} \varphi_1^N \\ \varphi_2^N \\ \varphi_3^N \end{matrix} = \begin{matrix} 140 \\ -148.2 \\ 8.2 \end{matrix}$$

φ_1	50 V
φ_2	-78 V
φ_3	30 V

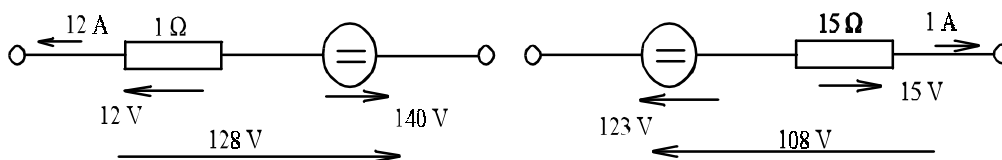


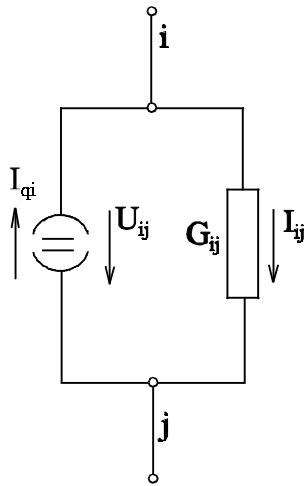
Bild EG373B

3.7.4. Knotenpunkt-Potential-Verfahrens für Rechner

Beim manuellen Knotenpunkt-potential-Verfahren mußten die Matrix und Vektoren aus der Struktur des Netzes bestimmt werden. Anschließend erfolgte die Lösung des Gleichungssystems. Wenn nun aber die Lösung schon in einem Rechner erfolgt, kann das Verfahren weiter schematisiert werden. Damit sinkt auch die Fehlerwahrscheinlichkeit bei großen Netzwerken.

Für ein Netzwerk mit k-Knoten und z-Zweigen sollen die folgenden drei Gesetze in Matrixschreibweise angegeben werden:

- ohmsches Gesetz
- 1. Kirchhoffsches Gesetz (Stromsumme)
- 2. Kirchhoffsches Gesetz (Maschenumlauf)



$$U_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$$

$$I_{ij} = G_{ij}(\varphi_i - \varphi_j)$$

Vereinbarung der Zweigrichtung

Beim Knotenpunkt-Potential-Verfahren sind nur Netzwerke mit Stromquellen auszuwerten. Spannungsquellen müssen in Stromquellen gewandelt werden. Damit die obere Aussage (Summe der in den Knoten reinfließenden Ströme ist gleich der rausfließenden Quellströme) die gleiche \bar{K} -Matrix auf beiden Seiten der Gleichung ergibt, muß die Richtung der Quellströme in einem Zweig entgegengesetzt der Richtung am Leitwert sein.

Bild EG374A

Auswertung Ohmsches Gesetz:

Die Gleichungen für z-Zweige

$$I_1 = G_1 * U_1$$

$$I_2 = G_2 * U_2$$

$$\dots \dots$$

$$I_z = G_z * U_z$$

werden zur folgenden Vektorgleichung zusammengefaßt:

$$\bar{I} = \bar{G} * \bar{U} \quad (1)$$

Die Elemente der oberen Gleichung bedeuten:

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ \dots \\ I_z \end{bmatrix} \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} G_1 & & & & \\ & G_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ & & & & G_z \end{bmatrix} \quad \bar{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ \dots \\ U_z \end{bmatrix}$$

\bar{I} - Vektor der Ströme in den Zweigen $Dim(\bar{I}) = (z, 1)$

\bar{U} - Vektor der Spannung in den Zweigen $Dim(\bar{G}) = (z, 1)$

\bar{G} - Leitwertmatrix $Dim(\bar{U}) = (z, z)$

Auswertung 1. Kirchhoffsches Gesetz:

$$\sum I_i = \sum I_{q_i} \quad \text{für Knoten } 1 \dots k-1$$

Die Summe der reinfließenden Ströme der Stromquellen ist gleich der Summe der abfließenden Ströme in den Leitwerten. Diese Aussage kann auch in der Form Matrix mal Vektor angegeben werden:

	1	2			z									
1				=					=					
k-1														

I₁

I₂

...

...

I_z

I_{q1}

I_{q2}

...

...

I_{qz}

Als Abkürzung kann man angeben:

$$\bar{K} * \bar{I} = \bar{K} * \bar{I}_q \quad (2)$$

In der oberen Gleichung bedeuten:

$\bar{I} =$

I ₁
I ₂
...
...
I _z

$\bar{I}_q =$

I _{q1}
I _{q2}
...
...
I _{qz}

\bar{I} - Vektor der Ströme in den Zweigen $Dim(\bar{I}) = (z, 1)$

\bar{I}_q - Vektor der Quellströme in den Zweigen $Dim(\bar{I}_q) = (z, 1)$

\bar{K} - Knoten-Zweig-Inzidenz-Matrix $Dim(\bar{K}) = (k-1, z)$

Der Inhalt der Knotenzweig-Inzidenz-Matrix \bar{K} enthält die Informationen, wie der Zweig mit dem Knoten verbunden ist. Am Kreuzungspunkt Zweig-Masche wird eingetragen:

"0" wenn Knoten nicht mit Zweig verbunden ist

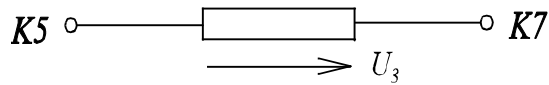
"1" wenn Pfeil des Leitwert-Zweiges vom Knoten weg zeigt

"-1" wenn Pfeil des Leitwert-Zweiges zum Knoten hinzeigt

Auswertung 2. Kirchhoffsches Gesetz:

Die Spannung an einem Zweig ergibt sich mit Hilfe der Potentiale. Liegt der Zweig "3" als Beispiel zwischen den Knoten 5 und 7 ergibt sich die Spannung U_3

$$U_3 = \varphi_5 - \varphi_7$$



aus der Differenz der Potentiale der Knotenpunkte. Dieses kann für alle Zweige wieder in Matrix-Form geschrieben werden:

		1	2	k-1	
U_1	1				φ_1
U_2	2				φ_2
...					...
...					...
U_z	z				φ_{k-1}

Die obere Matrix gibt wieder den Zusammenhang zwischen Zweigen und Knoten an. In jeder Zeile müssen eine "1" und eine "-1" stehen. Eine "+1" wenn der Pfeil des Stromes im Leitwertzweig vom Knoten weg zeigt und eine "-1" wenn der Pfeil zum Knoten hinzeigt. Die obere Matrix ist fast die Knoten-Zweig-Inzidenz-Matrix, nur transponiert. Damit kann die obere Gleichung geschrieben werden als:

$$\bar{U} = \bar{K}^T * \bar{\varphi} \quad (3)$$

Auswertung der Formeln

$$\bar{I} = \bar{G} * \bar{U} \quad (1)$$

$$\bar{K} * \bar{I} = \bar{K} * \bar{I}_q \quad (2)$$

$$\bar{U} = \bar{K}^T * \bar{\varphi} \quad (3)$$

Gleichung (3) in (1) eingesetzt ergibt:

$$\bar{I} = \bar{G} * \bar{K}^T * \bar{\varphi} \quad (4)$$

Gleichung (4) wird in (2) eingesetzt:

$$\bar{K} * \bar{G} * \bar{K}^T * \bar{\varphi} = \bar{K} * \bar{I}_q \quad (5)$$

Die obere Gleichung ist mit

$$\bar{G}' = \bar{K} * \bar{G} * \bar{K}^T$$

und

$$\bar{I}_q' = \bar{K} * \bar{I}_q$$

das Gleichungssystem des manuellen Knotenpunkt-Potential-Verfahrens:

$$\bar{G}' * \bar{\varphi} = \bar{I}_q'$$

Invertieren und Multiplizieren von links der Matrix $\bar{K} * \bar{G} * \bar{K}^T$ aus Gleichung (5) ergibt

$$\bar{\varphi} = [\bar{K} * \bar{G} * \bar{K}^T]^{-1} * \bar{K} * \bar{I}_q \quad (6)$$

Mit Hilfe von (3) und (6) lassen sich die Zweig-Spannungen angeben:

$$\bar{U} = \bar{K}^T [\bar{K} * \bar{G} * \bar{K}^T]^{-1} * \bar{K} * \bar{I}_q \quad (7)$$

Aus (1) und (7) lassen sich auch die Zweigströme bestimmen:

$$\bar{I} = \bar{G} * \bar{K}^T [\bar{K} * \bar{G} * \bar{K}^T]^{-1} * \bar{K} * \bar{I}_q \quad (8)$$

Die Aufgabe besteht bei diesem Verfahren darin, die Matrizen \bar{K} und \bar{G} sowie den Vektor \bar{I}_q in den Rechner einzugeben. Alle anderen Berechnung wie

- transponieren
- Matrizen multiplizieren
- Matrizen invertieren
- Vektor multiplizieren
- Ausgabe

sollten getestete Unterprogramme des Rechners übernehmen. Besteht diese Möglichkeit nicht, ist für kleine Netzwerke ein manuelles Knotenpunkt-Potential-Verfahren angebracht.

3.7.5. Schema zum Knotenpunkt-Potential-Verfahren für Rechner

gegeben: Netzwerk mit k-Knoten und z-Zweigen

- A] Ein Knoten wird mit "0" gekennzeichnet.
- B] Die anderen Knoten bekommen die Indizes
1, 2, 3 k-1
- C] Sämtliche Spannungs-Quellen in Strom-Quellen umwandeln.
- D] Widerstände in Leitwerte angeben.
- E] Jedem Zweig eine Richtung zuordnen. Dabei muß bei Zweigen mit Stromquellen die Richtung der Quelle entgegengesetzt zur Richtung des Widerstandes sein.
- F] Matrix \bar{K}^T der Dimension (z, k-1) auffüllen. Am Kreuzungspunkt Zweig-Masche steht eine "1", wenn der Zweigstrom (Richtung des Stromes im Widerstand) aus dem Knoten herausfließt und eine "-1" wenn der Zweigstrom in den Knoten hineinfließt. Der Rest der Matrix ist Null.

Zweite Möglichkeit \bar{K}^T zu bestimmen:

$$\bar{U} = \bar{K}^T * \bar{\varphi}$$

Die Zweigspannung mit Hilfe der Potentiale bestimmen. Die Verknüpfungsmatrix ist \bar{K}^T .

- G] Vektor \bar{I}_q auffüllen mit den Werten der Stromquellen in den Zweigen.
- H] Leitwerte der Zweige in der Diagonalen der Matrix \bar{G} eintragen.
- I] \bar{G} , \bar{K}^T und \bar{I}_q normieren und in den Rechner eingeben.
- J] Rechner berechnet die Zweigwerte nach folgenden Formeln:

$$\bar{\varphi} = [\bar{K} * \bar{G} * \bar{K}^T]^{-1} \bar{K} * \bar{I}_q \quad (6)$$

$$\bar{U} = \bar{K}^T [\bar{K} * \bar{G} * \bar{K}^T]^{-1} \bar{K} * \bar{I}_q \quad (7)$$

$$\bar{I} = \bar{G} * \bar{K}^T [\bar{K} * \bar{G} * \bar{K}^T]^{-1} \bar{K} * \bar{I}_q \quad (8)$$

- L] Evtl. Strom-Quellen zurückwandeln
- M] Probe

Beispiel:

Im Netzwerk 3J sollen sämtliche Zweigspannungen und Zweigströme mit Hilfe des Knotenpunkt-Potential-Verfahren für Rechner bestimmt werden.

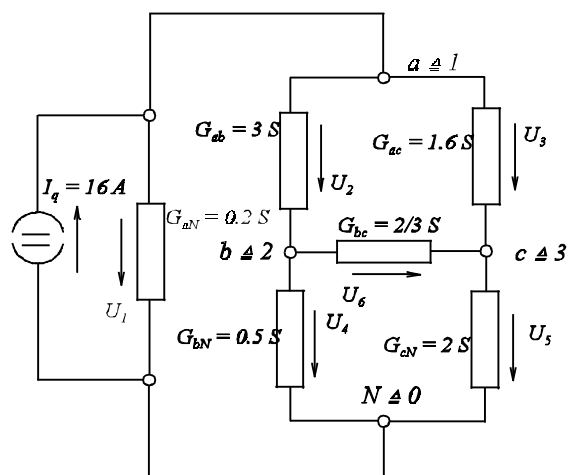


Bild EG375A

- Zweigrichtung einzeichnen (siehe Skizze)
- Matrix \bar{K}^T bestimmen

$$\begin{array}{|c|} \hline U_1 \\ \hline U_2 \\ \hline U_3 \\ \hline U_4 \\ \hline U_5 \\ \hline U_6 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \varphi_1 \\ \hline \varphi_1 - \varphi_2 \\ \hline \varphi_1 - \varphi_3 \\ \hline \varphi_2 \\ \hline \varphi_3 \\ \hline \varphi_2 - \varphi_3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \hline 1 & & \\ \hline 1 & -1 & \\ \hline 1 & & -1 \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline & 1 & -1 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|} \hline \varphi_1 \\ \hline \varphi_3 \\ \hline \varphi_3 \\ \hline \end{array}$$

$$\bar{K}^T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline 1 & -1 & \\ \hline 1 & & -1 \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline & 1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$\bar{G}^N = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0.2 & & & & & \\ \hline & 3 & & & & \\ \hline & & 1.6 & & & \\ \hline & & & 0.5 & & \\ \hline & & & & 2 & \\ \hline & & & & & 2/3 \\ \hline \end{array}$$

- Stromquellenvektor aufstellen

$$\bar{I}_q = \begin{array}{|c|} \hline 16 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

- Werte berechnen:

$$\bar{U} = \bar{K}^T [\bar{K} * \bar{G} * \bar{K}^T]^{-1} \bar{K} * \bar{I}_q$$

$$\bar{I} = \bar{G} * \bar{U}$$

$$\bar{U}^N = \begin{array}{|c|} \hline U_1^N \\ \hline U_2^N \\ \hline U_2^N \\ \hline U_4^N \\ \hline U_5^N \\ \hline U_6^N \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 10 \\ \hline 2 \\ \hline 5 \\ \hline 8 \\ \hline 5 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\bar{I}^N = \begin{array}{|c|} \hline I_1^N \\ \hline I_2^N \\ \hline I_3^N \\ \hline I_4^N \\ \hline I_5^N \\ \hline I_6^N \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 6 \\ \hline 8 \\ \hline 4 \\ \hline 10 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

Hinweis: Auch schon mit HP48 schnellste Methode

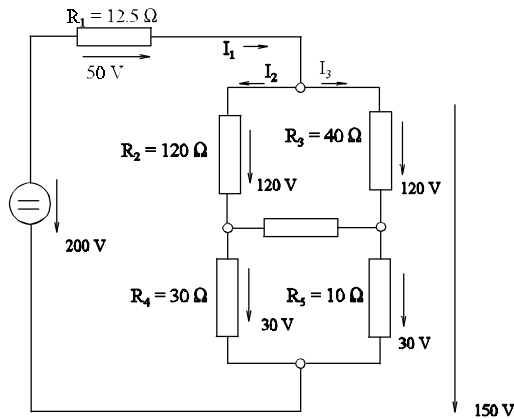
3.8. Symmetrie-Überlegungen

Prinzip: Punkte gleichen Potential können entweder kurzgeschlossen werden oder aber auch die Verbindungen zwischen Punkten gleichen Potential aufgehoben werden.

weil $U = 0$

$I = 0$

Beispiel:



\Rightarrow abgegliche Brücke weil

$$\frac{R_2}{R_4} = \frac{R_3}{R_5}$$

$$\frac{120\ \Omega}{30\ \Omega} = \frac{40\ \Omega}{10\ \Omega}$$

Bild EG38A

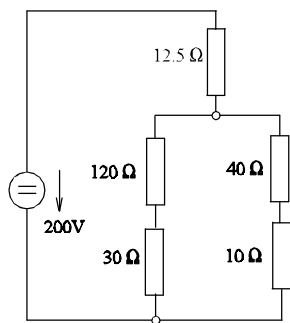


Bild EG38B

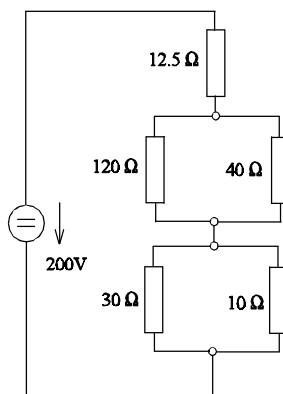
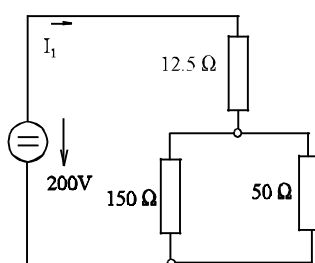
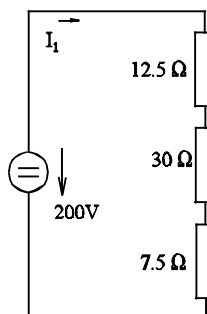


Bild EG38C



$$I_1 = \frac{200\ \text{V}}{12.5\ \Omega + \frac{150\ \Omega * 50\ \Omega}{150\ \Omega + 50\ \Omega}} = 4\ \text{A}$$

Bild EG38D



$$I_1 = \frac{200\ \text{V}}{12.5\ \Omega + 30\ \Omega + 7.5\ \Omega} = 4\ \text{A}$$

Bild EG38E

3.9. Zusammenfassung der Verfahren für lineare Netzwerke

3.1. Einleitung

3.1.1. Begriffe

3.1.2. Normierung

3.2. Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze

3.3. Maschenstrom-Verfahren

3.4. Netz-Umwandlung

3.4.1. Ersatzwiderstand

3.4.2. Quellenwandlung

3.4.3. Stern-Dreieck- und Dreieck-Stern-Umwandlung

3.4.4. Verlegung idealer Strom-Quellen

3.4.5. Umwandlung idealer Quellen

3.5. Überlagerungssatz

3.6. Ersatzquelle

3.7. Knotenpunkt-Potential-Verfahren

3.8. Symmetrie-Überlegungen

4. Energie und Leistung

4.1. Spannung, Potential, Feldstärke, Kraft

4.1.1. Spannung in SI-Einheiten

Die Ableitung der SI-Einheit der Spannung erfolgt über die Kraft auf eine elektrische Ladung im elektrischen Feld. Dazu wird der Versuch 4.1 nach Bild EG411A durchgeführt. Gemessen wird zwischen zwei Kondensatorplatten deren Abstand klein gegenüber den Abmessungen der Platten ist. Dieses ergibt ein homogenes elektrisches Feld. Untersucht wird die Kraft auf eine Ladung, wobei die Größen

- l - Abstand der Platten
- U - anliegende Spannung und
- Q - Größe der Ladung

variiert werden.

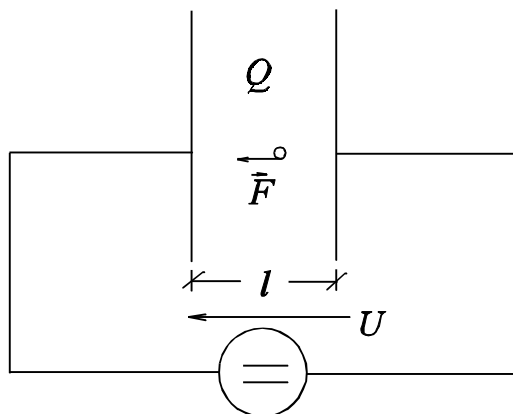


Bild EG411A: Versuch 4.1: Kraft auf eine Ladung im elektrischen Feld

U	l	Q	F
U_0	l_0	Q_0	F_0
$2U_0$	l_0	Q_0	$2F_0$
$3U_0$	l_0	Q_0	$3F_0$
U_0	$2l_0$	Q_0	$F_0/2$
U_0	$3l_0$	Q_0	$F_0/3$
U_0	l_0	$2Q_0$	$2F_0$
U_0	l_0	$3Q_0$	$3F_0$

Aus den Ergebnissen der Messung (siehe obere Tabelle) kann man erkennen, daß die Kraft auf die Ladung proportional zur Größe der Ladung und zur Spannung U ist und umgekehrt proportional sich zum Abstand l verhält:

$$F \sim Q \cdot \frac{U}{l}$$

Die obere Proportionalität kann auch mit Hilfe einer Proportionalitätskonstanten c beschrieben werden:

$$F = c \cdot Q \cdot \frac{U}{l}$$

Da die Spannung als SI-Einheit noch nicht definiert wurde, ist die Konstante c in der oberen Formel noch frei wählbar. Also ist auch $c = 1$ wählbar.

$$F = Q \cdot \frac{U}{l}$$

Aus der oberen Formel läßt sich die SI-Einheit der Spannung bestimmen:

$$U = \frac{F \cdot l}{Q}$$

$$[l] = \text{m}$$

$$[Q] = \text{As}$$

$$[F] = [m] \cdot [a] = \text{kg m/s}^2 = \text{kg ms}^{-2}$$

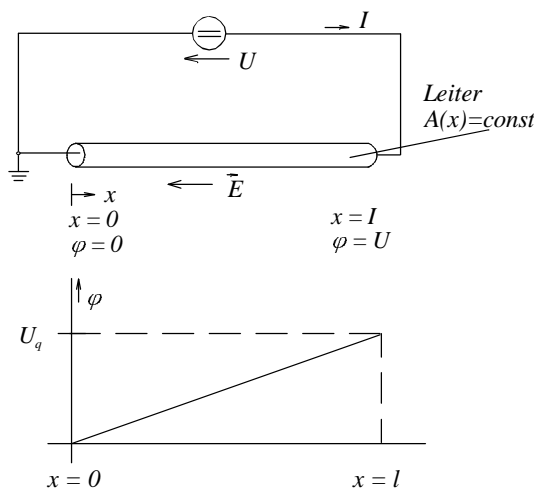
$$[U] = \frac{[F] \cdot [l]}{[Q]} = \frac{\text{kg m s}^{-2} \text{ m}}{\text{As}}$$

$$[U] = \text{kg m}^2 \text{ A}^{-1} \text{ s}^{-3} = 1 \text{ V}$$

Damit ist die abgeleitete SI-Einheit "V" mit Hilfe der SI-Basis Einheiten kg, m, s und A zu beschreiben.

4.1.2. Potential und Feldstärke

Der Begriff des Potentials ist schon bekannt: Einem Punkt wird willkürlich des Potential $\varphi_0 = 0 \text{ V}$ zugeordnet. Bei Netzwerksberechnungen wurde nur einzelnen Punkten (Knotenpunkte) ein Potential zugeordnet. Bei leitenden Materialien läßt sich jedem Punkt ein Potential zuordnen. Der Zusammenhang zwischen Potential und Feldstärke läßt sich am einfachsten an einem stromdurchflossenen Leiter gleichmäßigen Querschnitts erklären, siehe Bild EG412A.



Bei einem Leiter gleichen Querschnitts ergibt sich die in Bild EG412A dargestellte gleichmäßige Verteilung (linearer Anstieg) des Potentials. Mathematisch läßt sich die Abhängigkeit als Gerade durch Null beschreiben:

$$\varphi(x) = \frac{U}{l} \cdot x \quad (\text{A})$$

Der Ausdruck U/l wird betragsmäßig als Feldstärke bezeichnet

$$E = \frac{U}{l} = \frac{\text{Spannung}}{\text{Länge}} \quad (\text{B})$$

Bild EG412A

$$[E] = \frac{[U]}{[l]} = \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Die Richtung der Feldstärke wird definiert als von Plus nach Minus und ist somit vom Ort höheren Potentials zum Ort niedrigeren Potentials gerichtet. Außerdem ist in einem Leiter der Strom in Richtung der Feldstärke gerichtet. Damit zeigt die in Bild EG412A eingezeichnete Richtung der Feldstärke in Richtung der negativen x-Achse. Die Differentiation der Gleichung (A) unter Berücksichtigung des Vorzeichens ergibt

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{U}{l} = -E_x \quad \Rightarrow \quad E_x = -\frac{d\varphi}{dx}$$

Bei Berücksichtigung von drei Koordinaten muß in jeder der drei Koordinatenrichtungen differenziert werden, da dieses aber partiell erfolgt, geht "d" über in "∂":

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial x \\ \partial\varphi/\partial y \\ \partial\varphi/\partial z \end{pmatrix} = -\text{grad}(\varphi)$$

4.2. Bestimmungsgleichung der elektrischen Energie

Die Bestimmung der elektrischen Energie erfolgt über den Umweg der mechanischen Energie.

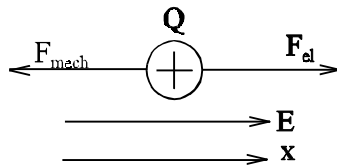


Bild EG42A

Die Ladung Q nach Bild EG42A soll im elektrischen Feld der Stärke E in x -Richtung bewegt werden. Nach Abschnitt 4.1 war die elektrische Kraft auf die Ladung:

$$F_{el} = Q \cdot \frac{U}{l} = Q \cdot E$$

Die mechanische Kraft ist entgegengesetzt zur elektrischen gerichtet:

$$F_{mech} = -F_{el} = -Q \cdot E = -Q \cdot \left(-\frac{d\varphi}{dx} \right) = Q \cdot \frac{d\varphi}{dx} \quad (A)$$

Die mechanische Energie ergibt sich durch Integration:

$$W_{mech} = \int_{x_1}^{x_2} F_{mech} dx = \int_{x_1}^{x_2} Q \cdot \frac{d\varphi}{dx} dx$$

Die mechanische Energie wird gleich der elektrischen gesetzt, danach die Kraft durch (A) ersetzt:

$$W_{el} = W_{mech} = \int_{x_1}^{x_2} Q \cdot \frac{d\varphi}{dx} dx = Q(\varphi_2 - \varphi_1) = Q(U_2 - U_1) = Q \cdot U_{21}$$

Damit ergibt sich die elektrische Energie aus Ladung und Potentialdifferenz. Für den Gleichstromfall kann Q ersetzt werden

$$Q = I \cdot t$$

damit kann für Gleichstrom angegeben werden:

$$W_{el} = U \cdot I \cdot t$$

oder für zeitabhängige Größen:

$$W_{el} = \int i \cdot u \cdot dt$$

4.3. Energiearten

4.3.1. Energie und Arbeit

Physikalische **Arbeit** wird z.B. verrichtet, wenn an einem Körper die Kraft F angreift und der Körper längs der Richtung von F bewegt wird:

$$W_{\text{Arbeit}} = \int F \cdot ds$$

Was ist nun Energie?

Energie ist die Fähigkeit Arbeit zu verrichten. Energie ist speicherbar. Um eine physikalische Arbeit zu verrichten, bedarf es einer **Energieumwandlung**.

4.3.2. Potentielle mechanische Energie

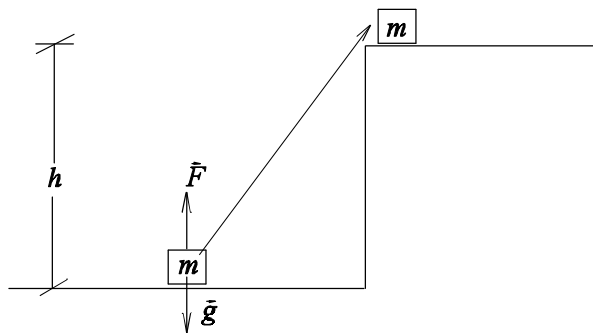


Bild EG432A

Wird ein Körper im Schwerfeld der Erde um die Höhe h angehoben, muß folgende Arbeit verrichtet werden:

$$W_{\text{Arbeit}} = \int F \cdot ds = \int (m \cdot g) ds = m \cdot g \cdot h$$

Diese verrichtete Arbeit wird im Kraftfeld der Erde mit Hilfe der Masse m als potentielle Energie gespeichert.

$$W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$$

4.3.3. Kinetische Energie

Wird ein Körper beschleunigt, greift die folgende Kraft an:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

Die geleistete Arbeit ergibt sich aus:

$$W_{\text{Arbeit}} = \int F ds = \int m \frac{dv}{dt} ds = \int m \frac{ds}{dt} \cdot dv = m \int v \cdot dv = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Diese geleistete Arbeit wird als **kinetische Energie der linearen Bewegung** gespeichert:

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Bei der Drehbewegung ergibt sich mit

$$\Theta = \int R^2 \cdot dm \quad - \text{Massenträgheitsmoment} \quad [\Theta] = \text{kgm}^2$$

$$\begin{array}{ll} \omega & - \text{Winkelgeschwindigkeit} \quad [\omega] = \text{s}^{-1} \\ R & - \text{Radius} \quad [R] = \text{m} \end{array}$$

die **kinetische Energie der Drehbewegung**:

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2$$

4.3.4. Druckenergie

4.3.4.1. Druckenergie eines geschlossenen Systems

Bei einem geschlossenen System erfolgt kein Massenstrom über die veränderliche Systemganze, z.B. geschlossener Kolben, siehe Bild EG4341A.

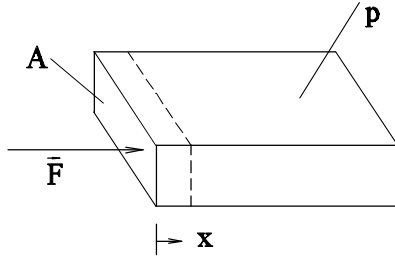


Bild EG4341A

Bei Kompression wird die Kraft

$$F = p \cdot A$$

aufgebraucht. Die benötigte Arbeit

$$W = \int F \cdot dx = \int p \cdot A \cdot dx$$

kann mit

$$A \cdot dx = -dV$$

als die Druckenergie des Volumens bei konstanter Masse angegeben werden:

$$W_p = - \int p \cdot dV$$

4.3.4.2. Arbeit im Druckfeld bei Volumenstrom

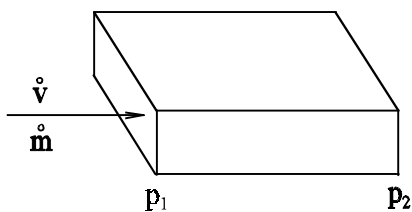


Bild EG4342A

Wird ein Massen(Volumen)strom im Druckfeld bewegt, erfährt er nach Bild EG4342A zwischen den Punkten 1 und 2 eine Änderung der inneren Energie

$$W = V \cdot p_2 - V \cdot p_1 = V(p_2 - p_1) = V \cdot \Delta p$$

$$W_p = \int V \cdot dp$$

4.3.5. Thermische Energie

Die Zustandsgröße Temperatur beinhaltet Schwingungen der Elektronen, Atomkerne und der Moleküle. Diese Schwingungen enthalten wiederum kinetische Energie der Bewegung. Wird ein Körper erhitzt, muß diesem Energie in Form von Wärme zugeführt werden. Der thermische Energieinhalt ist somit von der Temperatur abhängig, im allgemeinen nichtlinear, kann aber mit Hilfe einer Materialkonstanten linear durch eine Gerade angenähert werden:

$$W_{\text{ther}} = m \cdot c \cdot (T_2 - T_1) = m \cdot c \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) = m \cdot c \cdot \Delta T = m \cdot c \cdot \Delta \vartheta$$

c - Spezifische Wärme $[c] = \frac{Ws}{kg \cdot K} = \frac{Ws}{kg \cdot ^\circ C}$

4.3.6. Schmelzwärme und Verdampfungsenergie

Versuch 4.2: Eis (H_2O , Wasser im festen Zustand) der Temperatur $\vartheta = -50^\circ C$ wird eine konstante Wärmemenge (Energie pro Zeit = Leistung) zugeführt. **Ergebnis:** Die Temperatur steigt kontinuierlich bis auf $0^\circ C$ an verbleibt danach eine längere Zeitspanne, bis das gesamte Eis geschmolzen ist. Danach steigt die Temperatur wieder kontinuierlich bis $100^\circ C$ an und verbleibt eine noch längere Zeit bei dieser Temperatur verharren, bis das gesamte Wasser verdampft ist. **Fazit:** Um von einem Aggregatzustand zum anderen zu gelangen, wird Energie benötigt. **Grund:** Die Bindungen müssen gelöst werden. Die Schmelzwärme und die Verdampfungsenergie sind von der Masse und einer Stoffkonstanten abhängig.

$$W_{\text{schm}} = q \cdot m$$

$$W_{\text{verd}} = r \cdot m$$

q - spezifische Schmelzwärme $[q] = \frac{Ws}{kg}$

r - spezifische Verdampfungswärme $[r] = \frac{Ws}{kg}$

Die oben beschriebenen Vorgänge sind reversible, d.h. in der anderen Richtung wird beim Kondensieren (Übergang gasförmig nach flüssig) die vorher aufgebrachte Verdampfungsenergie als Kondensationswärme wieder frei. Beim Erstarren (Übergang flüssig nach fest) wird auch die aufgebrachte Schmelzwärme als Erstarrungswärme wieder frei.

Schmelzwärme, Verdampfungsenergie und auch die spezifische Wärme sind materialabhängig und können aus Tabellen entnommen werden. Eine kleine Auswahl zeigt Tabelle 4.1.

Material	Schmelzwärme	Verdampfungsenergie	spezifische Wärme
	q in kWskg^{-1}	r in kWskg^{-1}	c in $\text{Wskg}^{-1}\text{K}^{-1}$
H_2O	334 bei $0^\circ C$	2256 bei $100^\circ C$	4187
Alu	396 bei $659^\circ C$	11700 bei $2500^\circ C$	896
Ammoniak	1370 bei $-33,4^\circ C$		4470

Tabelle 4.1

4.3.7. Mechanische Reibungsverluste

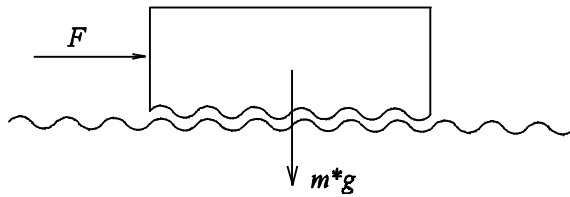


Bild EG437A

Die zur Überwindung der Reibung aufgebrauchte Arbeit wird in Wärme umgesetzt. Dieser Vorgang ist irreversibel, d.h. er kann nicht umkehrbar gemacht werden. Die Reibung bewirkt somit Verlustenergie bzw. Verlustleistung.

4.3.8. Magnetische Energie

Die Energie des magnetischen Feldes pro Volumen beträgt (3.Semester) allgemein:

$$\frac{W_{mag}}{V} = \int H dB$$

und im linearen Fall ($B = \mu * H$)

$$\frac{W_{mag}}{V} = \frac{1}{2} \vec{B} * \vec{H} = \frac{1}{2} \mu_0 * \mu_r * H^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0 * \mu_r} B^2$$

und für konzentrierte Energiespeicher (Induktivitäten):

$$W_{mag} = \frac{1}{2} L * I^2$$

4.3.9. Energie des elektrischen Feldes

Die Energie des elektrischen Feldes pro Volumen beträgt (2.Semester):

$$\frac{W_{el}}{V} = \frac{1}{2} \vec{E} * \vec{D} = \frac{1}{2} \epsilon_0 * \epsilon_r * E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon_0 * \epsilon_r}$$

und für konzentrierte Energiespeicher (Kapazität, Kondensator):

$$W_{el} = \frac{1}{2} C * U^2$$

4.3.10. Elektromagnetische Energie

Die elektromagnetischen Wellen umfassen weite Frequenz- und Wellenlängenbereiche. Die verschiedenen Arten sind in Tabelle 4.2 aufgeführt. Am bekanntesten ist das Licht, Fernseh- und Rundfunkwellen und die Wärmestrahlung.

Strahlungsart	Wellenlänge	Frequenz
Höhenstrahlung	10^{-12}m	$3 \cdot 10^{20}\text{ Hz}$
Röntgenstrahlung	10^{-9}m	$3 \cdot 10^{17}\text{ Hz}$
UV-Licht	$\approx 10^{-7}\text{m}$	$\approx 3 \cdot 10^{15}\text{ Hz}$
Licht	380 nm ... 780 nm	
IR-Licht	$\approx 1\mu\text{m}$	$\approx 3 \cdot 10^{14}\text{ Hz}$
Wärmestrahlung	$\approx \mu\text{m} \dots 1\text{ mm}$	$(3 \cdot 10^{14} \dots 3 \cdot 10^{11})\text{ Hz}$
mm Wellen	1 mm	300 GHz
cm Wellen	1 cm	30 GHz
dm Wellen	1 dm	3 GHz
Rundfunk + Fernsehen	1 m .. 10 km	300 MHz ... 30 kHz

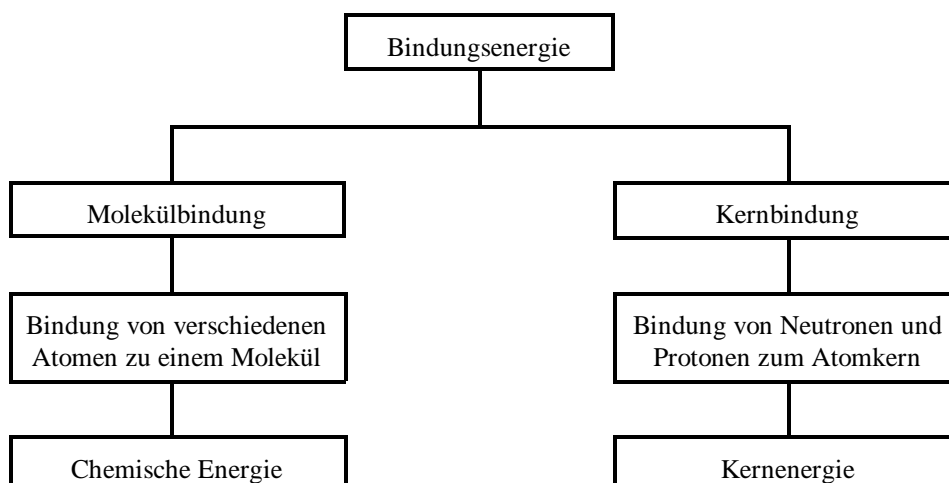
Tabelle 4.2: Wellenlängen- und Frequenz-Bereiche der elektromagnetischen Strahlung

Eine Übersicht über die Farben des Lichtes zeigt Tabelle 4.3.

Farbe	UV	violett	blau	grün	gelb	rot	IR
Wellenlänge in nm		380				780	

Tabelle 4.3: Wellenlängenbereich und Farben des sichtbaren Lichtes

4.3.11. Bindungsenergie



4.3.11.1. Chemische Energie

Jede chemische Reaktion ist mit einer **Energiedifferenz** verbunden.

Exotherme Vorgänge verlaufen unter Energieabgabe. Am bekanntesten ist die Verbrennung, eine Reaktion mit Sauerstoff. Damit eine **endotherme Reaktion** erfolgt, muß Energie zugeführt werden.

Beispiel aus der Natur: Sauerstoffkreislauf. Menschen und Tiere produzieren ihre benötigte Energie durch Verbrennung von Sauerstoff. Die Pflanzen setzen mit Hilfe der Energiezufuhr Sonnenlicht gebundenen Sauerstoff wieder frei.

Mehr zur Elektrochemie in Abschnitt 5.4.

4.3.11.2. Kernenergie

Seit Einstein ist bekannt: Masse und Energie sind äquivalent:

$$E = m \cdot c^2$$

Da die obere Formel besser als Energie mit E bekannt ist, wurde hier auf den Formelbuchstaben W verzichtet. In der Elektrotechnik würde der Formelbuchstabe E zu Verwechslungen mit der elektrischen Feldstärke führen. Die obere Formel sei am Beispiel Helium untersucht.

Helium besteht aus 2 Protonen, 2 Neutronen und 2 Elektronen.

Masse Helium: 4.0024 u

Masse 2 Protonen, 2 Neutronen und 2 Elektronen 4.0330 u

Es besteht eine Differenz in der Masse von

$$\Delta m = 4.0330 \text{ u} - 4.0024 \text{ u} = 0.0306 \text{ u}$$

Wo bleibt diese Masse, wenn ein Heliumatom aus oberen Bestandteilen zusammengesetzt würde? Antwort: Die Differenz der Masse Δm , auch Massendefekt genannt, wird als Energie abgegeben.

$$1 \text{ u} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\Delta m = 0.0306 \text{ u} = 0.0306 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 5.08 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$$

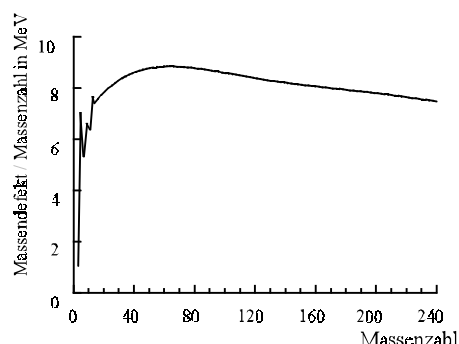
$$\Delta W = c^2 \cdot \Delta m = (3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1})^2 \cdot 5.08 \cdot 10^{-29} \text{ kg} = 4.57 \cdot 10^{-12} \text{ Js}$$

$$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 1 \text{ V} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Js}$$

- Elektronenvolt

$$\Delta W = \frac{4.57 \cdot 10^{-12} \text{ Js}}{1.6 \cdot 10^{-19} \frac{\text{Js}}{\text{eV}}} = 28.6 \cdot 10^6 \text{ eV} = 28.6 \text{ MeV}$$

Untersucht man alle Elemente des Periodensystems und stellt den Massendefekt als Funktion der Massenzahl (Anzahl Protonen + Neutronen) dar, erhält man das in Bild EG43112A dargestellte Ergebnis. Um die Ergebnisse vergleichen zu können, ist in Bild EG43112A der Massendefekt pro Massenzahl dargestellt.



Aus Bild EG43112A ist zu erkennen, wie man aus der Kernbindung Energie gewinnen kann: Man muß in Elementen wandeln, die einen größeren Massendefekt aufweisen. Da gibt es zwei Möglichkeiten:

Bild EG43112A

4.3.11.2.1. Kernfusion

Die Verschmelzung von kleinen Kernen zu größeren Elementen wird Kernfusion genannt. Die kontrollierte Fusion über einen längeren Zeitraum ist bis jetzt noch nicht gelungen.

4.3.11.2.2. Kernspaltung

Die Spaltung von Elementen mit Massenzahlen größer 200 ergibt auch einen Massendefekt. Dieses wird in Kernkraftwerken zur Energieumwandlung genutzt.

4.4. Energiewandler

4.4.1. Wandlung in elektrische Energie

4.4.1.1. Generatoren

Generatoren wandeln die **mechanische Energie** an der Welle um in elektrische Energie. Ursache: Induktionsgesetz, Lorentz-Kraft, siehe Kap. 9 (3. Semester).

4.4.1.2. Akkumulator, Batterie

Akkumulatoren und Batterien wandeln **chemische Energie** in elektrische. Ursache: elektrochemische Spannungsreihe hervorgerufen durch unterschiedliche Lösbarkeit der Elektroden im Elektrolyten, siehe auch Abschnitt 5.4.

4.4.1.3. Thermoelemente

Thermoelemente wandeln **thermische Energie** in Form von Temperaturunterschieden in elektrische Energie, siehe auch Abschnitt 5.3. Die Energiemenge ist hierbei gering. Thermoelemente werden nur zu Meßzwecken eingesetzt.

4.4.1.4. Fotoelement, Fotozelle, Solarzelle

Diese wandeln **Strahlungsenergie** in Form von Licht direkt in elektrische Energie um.

4.4.2. Wandlung der elektrischen Energie

4.4.2.1. Motore

Motore wandeln elektrische Energie in **mechanische Energie** um. Die Energie steht an der Welle der Maschine in Form von Drehmoment und Drehzahl zur Verfügung. Siehe auch Kap. 9 (3. Semester). Ursache: Lorentz Kraft (Leiter im Magnetfeld).

4.4.2.2. Elektrowärme

Wird ein ohmscher Widerstand vom Strom durchflossen, erfolgt immer die Umwandlung von elektrischer Energie nach **thermischer** (Verlust) **Energie**. In den meisten Fällen ist diese Verlustwärme ungewollt und muß aus dem Gerät abgeführt werden. Dieses kann durch Lüfter, Kühlkörper, Kühlrippen oder Flüssigkeitskühlung erfolgen. Die großen Geräte (z.B. Trafo $S_N = 500 \text{ MVA}$) weisen im Gegensatz zu kleinen Geräten eine wesentlich kleinere Oberfläche in Bezug zur Verlustleistung auf. Dieses bedingt eine Kühlung von außen durch Luft, Wasser oder Öl.

Eine bewußte Ausnutzung der thermischen Verlustwärme erfolgt bei Geräten der Elektrowärme.

Im Haushalt ist z.B. die Kochplatte, das Heißwassergerät, der Heizlüfter oder der Föhn bekannt, im Labor der Lötkolben. Diese Geräte weisen einen Heizwiderstand auf, in dem die Energie umgesetzt wird. Man spricht hier von **Widerstandeserwärmung**.

Bei der **konduktiven Erwärmung** wird der Strom direkt durch das zu erwärmende Gut geführt. Beispiel: Kupferdrähte werden zum Glühen mit hoher Geschwindigkeit durch zwei Kontakte gezogen. Der hohe Strom erwärmt den Draht. Am Ende wird abgeschreckt. Geschwindigkeit und Strom müssen so gewählt werden, daß sich die richtige Temperatur einstellt.

Lichtbogenöfen sind mit die größten Einzelverbraucher in der Energietechnik. Hier brennen zwischen einer (bei DC) oder drei (bei AC) Elektroden und dem Einsatzgut (Stahl oder Schrott) Lichtbögen als ohmscher Widerstand, von denen aus Wärme zum Einsatzgut übergeht.

Bei **Induktionsöfen** wird die Wärme mit Hilfe des Transformator-Prinzips direkt im leitfähigen zu erwärmenden Gut umgesetzt.

Weitere Arten der elektrischen Erwärmung sind:

- Plasmabrenner
- Dielektrische Erwärmung (Mikrowelle)
- Elektronenstrahl-Erwärmung
- Laser Erwärmung
- Funkenerosion

4.4.2.3. Elektrochemie

Beim Aufladen von Akkumulatoren und bei der Elektrolyse wird elektrische Energie in **chemische Energie** umgewandelt.

Bei der Elektrolyse wandern Stoffe (Ionen) von einer Elektrode zur anderen. An den Elektroden können chemische Reaktion ablaufen, als Beispiel: Aufspaltung von Wasser zu Sauerstoff und Wasserstoff. Aber auch chemisch reine Stoffe können mit der Elektrolyse gewonnen werden.

4.4.2.4. Beleuchtung

In Lampen erfolgt die Umsetzung von elektrischer Energie in u.a. **Strahlungsenergie** (Licht, elektromagnetische Welle).

Was ist Licht? Licht ist elektromagnetische Strahlung. Wie entsteht Licht? Atome können verschiedene diskrete (in Stufen) Energieniveaus (Abstand der Elektronen zum Kern) aufweisen. Durch Anregung wird ein Atom in eine höheres Energieniveau gebracht. Fällt das Atom in ein tieferes Energieniveau zurück, wird die Energiedifferenz in Form eines Lichtquants (Photon der Ruhemasse Null) abgegeben.

Es gibt zwei Arten der Lichterzeugung, die sich um die Anregungsart unterscheiden.

Bei der Glühlampe werden die Atome aufgrund thermischer Energie (Stromwärme) angeregt.

Bei Gasentladungslampen (u.a. Leuchtstofflampe) erfolgt die Anregung mit Hilfe eines Stromes durch ein elektrisch leitendes Gas.

4.4.3. Turbine

Bei großen Kraftwerken erfolgt die Bereitstellung der mechanischen Energie an der Welle der Generatoren mit Hilfe von Turbinen. Je nach Kraftwerksart werden unterschiedliche Turbinen eingesetzt.

4.4.4. Kraftwerke

In Kraftwerken wird die benötigte elektrische Energie zur Verfügung gestellt (umgewandelt). Je nach Primärenergie unterscheidet man verschiedene Kraftwerkstypen. Bei den meisten Kraftwerksarten wird die Primärenergie erst in verschiedene andere Energieformen gewandelt, bevor in elektrische Energie gewandelt wird.

Bei **fossil befeuerten Wärmekraftwerken** wird die chemische Energie der Kohle oder des Gases über mehrere Energiewandlungen in elektrische Energie umgewandelt.

In **Kernkraftwerken** werden Uran oder Plutonium mit Massenzahlen über 200 in kleinere Elemente mit größerem Massendefekt aufgespalten.

In **Wasserkraftwerken** wird die potentielle Energie des Wassers in elektrische Energie gewandelt.

In **Windkraftwerken** wird die kinetische Energie der Luftströmung in elektrische Energie gewandelt.

In **Solarkraftwerken** wird die elektromagnetische Strahlung der Sonne in elektrische Energie gewandelt.

4.5. Elektrische Leistung

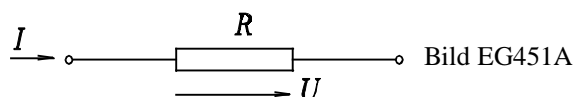
Die Leistung ist definiert als Arbeit oder Energie pro Zeit:

$$\text{Leistung} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit}}$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(U \cdot I \cdot t) = U \cdot I$$

$$P = U \cdot I$$

4.5.1. Leistung an einem ohmschen Widerstand



Nach der oben abgeleitete Formel gilt für jedes Ersatzschaltbild-Element, also auch für den ohmschen Widerstand:

$$P = U \cdot I$$

Wird der Strom $I = U/R$ durch die Spannung ersetzt, ergibt sich:

$$P = U \cdot \frac{U}{R}$$

$$P = \frac{U^2}{R}$$

Das Ersetzen der Spannung $U = R \cdot I$ durch den Strom ergibt dagegen:

$$P = R \cdot I \cdot I$$

$$P = I^2 \cdot R$$

Verluste: In jedem stromdurchflossenen ohmschen Widerstand (also auch jedem Leiter) tritt eine Verlustleistung auf, die bis auf Anwendungen der Elektrowärme nicht erwünscht ist.

$$P_{\text{verluste}} = I^2 \cdot R$$

4.5.2. Leistungsbilanz und Wirkungsgrad

Allgemein:

Einem Gerät wird eine Leistung P_{zu} zugeführt. Im Gerät entsteht eine Verlustleistung P_v . Übrig bleibt die Nutzleistung P_{ab} die abgegeben wird, siehe Bild EG452A. Diese Aussage gilt allgemein und ist nicht nur auf elektrische Geräte bezogen.

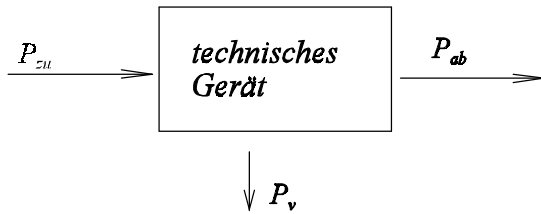


Bild EG452A

Der Wirkungsgrad ist definiert als das Verhältnis von abgegebener Leistung zu zugeführter Leistung und wird manchmal auch in % angegeben:

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} = 100 \% \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$

Leistungsbilanz: $P_{zu} = P_v + P_{ab}$

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{ab} + P_v} = \frac{P_{zu} - P_v}{P_{zu}} = 1 - \frac{P_v}{P_{zu}}$$

Elektrische Verbraucher

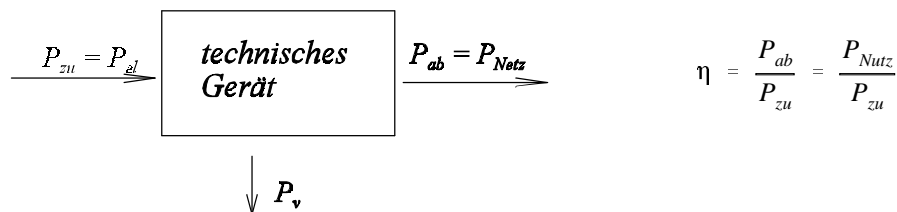


Bild EG452B

Elektrische Erzeuger

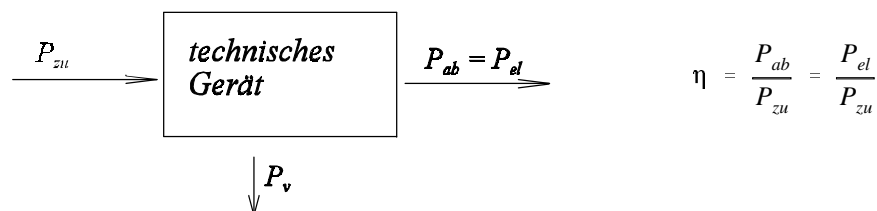


Bild EG452C

Größe des Wirkungsgrades

Energietechnik: etwas kleiner als 1
Nachrichtentechnik: uninteressant

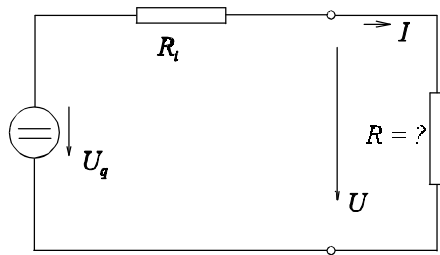
4.5.3. Leistungsanpassung

Bild EG453A

Gesucht ist derjenige Widerstand R nach Bild EG453A, an dem die größte Leistung auftritt.

Methode: $P = f(R)$ berechnen

$$P = I^2 * R = \left(\frac{U_q}{R_i + R} \right)^2 * R$$

$$P = U_q^2 \frac{R}{(R_i + R)^2}$$

$$\frac{dP}{dR} = U_q^2 \frac{(R_i + R)^2 * 1 - R * 2 * (R_i + R)}{(R_i + R)^4} = U_q^2 \frac{R_i^2 + 2RR_i + R^2 - 2RR_i - 2R^2}{(R_i + R)^4} = U_q^2 \frac{R_i^2 - R^2}{(R_i + R)^3}$$

$$\frac{dP}{dR} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_i^2 - R^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_i^2 = R^2$$

$$R_i = R$$

Leistungsanpassung tritt auf, wenn der Belastungswiderstand gleich dem Innenwiderstand der Quelle ist.

$$P_{\max} = \frac{U_q^2}{4R_i}$$

Wirkungsgrad der Schaltung nach Bild EG453A:

$$\eta = \frac{P_R}{P_q} = \frac{I^2 * R}{I^2 * R + I^2 * R_i} = \frac{R}{R + R_i} = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R}}$$

Aus dem Bild EG453B ist der Zusammenhang zwischen Leistung, Wirkungsgrad und Widerstandsverhältnis zu kennen. Bei Leistungsanpassung ist der Wirkungsgrad 50 %. Diese Methode ist für die Energietechnik nicht geeignet.

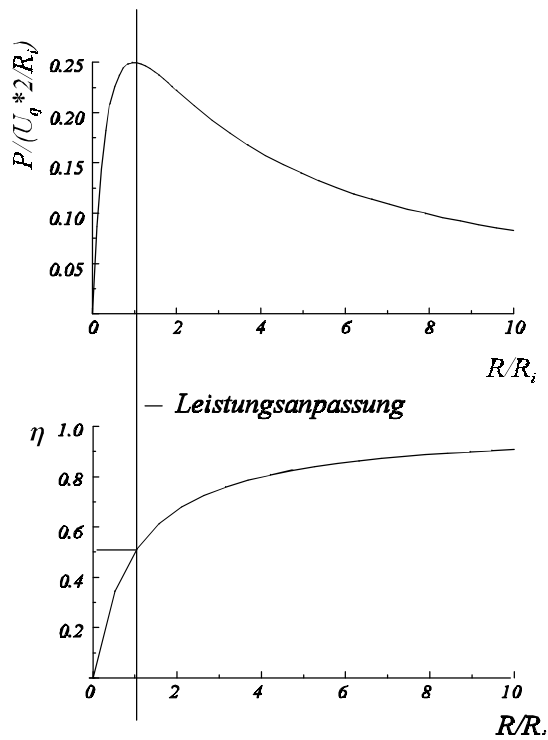


Bild EG453B

Problematik: In einem Netzwerk soll die Leistung an einem Widerstand maximiert werden.

Lösung: Durch Netzwerkkumformungen oder nach dem Prinzip der Ersatzspannungsquelle wird das Restnetzwerk durch Spannungsquelle mit Innenwiderstand dargestellt. Danach ist nach der Methode die Leistungsanpassung möglich.

Beispiel:

Beim Netzwerk 3C soll der Widerstand R_2 so variiert werden, so daß die Leistung an R_2 maximal wird.

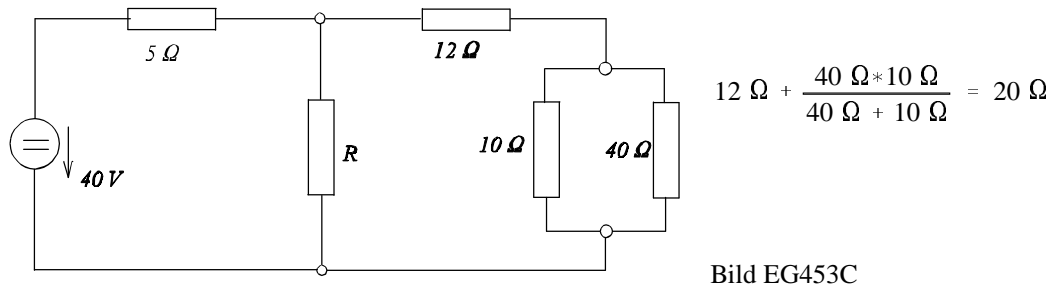


Bild EG453C

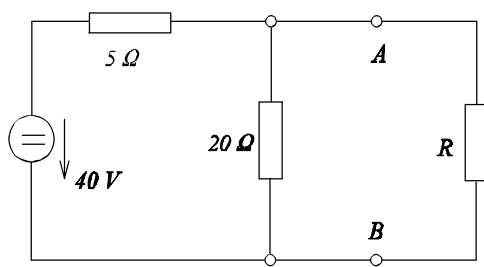


Bild EG453D

An den Klemmen A und B kann das Restnetzwerk nach der Methode Ersatzspannungsquelle ersetzt werden.

Leerlaufspannung: $U_q^* = 40 \, V * \frac{20 \, \Omega}{20 \, \Omega + 5 \, \Omega} = 32 \, V$

Innenwiderstand: $R_q^* = 5 \, \Omega \parallel 20 \, \Omega = \frac{5 \, \Omega * 20 \, \Omega}{5 \, \Omega + 20 \, \Omega} = 4 \, \Omega$

Nach der Methode Leistungsanpassung ergibt sich

$$R = R_q^* = 4 \, \Omega$$

$$P_{\max} = \frac{1}{4} \frac{U_q^{*2}}{R_q^*} = \frac{1}{4} \frac{(32 \, V)^2}{4 \, \Omega} = 64 \, W$$

4.6. Elektrisches Erwärmen

Wiederholung aus Abschnitt 4.3.5 und 4.3.6

W_{therm}	-	Wärmemenge zum Aufheizen
W_{schm}	-	Schmelzwärme
W_{verd}	-	Verdampfungswärme

$$W_{\text{therm}} = m \cdot c \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

$$W_{\text{schm}} = q \cdot m$$

$$W_{\text{verd}} = r \cdot m$$

Ein Teil der elektrischen Energie

$$W_{\text{el}} = P \cdot t$$

geht auf den zu erwärmenden Körper über, der andere an die Umgebung. Der Nutzanteil ist mit dem Wirkungsgrad verknüpft:

$$W_{\text{therm}} = \eta \cdot W_{\text{el}}$$

Das Gleichsetzen von elektrischen Nutzanteil und thermischer Energie ergibt die Erwärmungsformeln für Gleichstrom:

$m \cdot c \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) = \eta \cdot P \cdot t$
$q \cdot m = \eta \cdot P \cdot t$
$r \cdot m = \eta \cdot P \cdot t$

4.7. Mechanische Leistung und Energie

Heben einer Last (Masse)

$$W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$$

$$P = \frac{dW}{dt} = m \cdot g \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$P = m \cdot g \cdot v$$

Bewegen mit der Kraft in Wegrichtung

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\frac{dW}{dt} = \int \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt}$$

$$P = F \cdot v$$

Beschleunigen einer Masse

$$W = \int F \cdot ds = \int m \cdot a \cdot ds = \int m \frac{dv}{dt} \cdot ds = \int m \cdot dv \frac{ds}{dt}$$

$$W = m \int v \cdot dv$$

$$W = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

4.8. Energieübertragung über Gleichstromleitungen

Eine elektrische Leitung nach Bild EG48A weist einen Kupferwiderstand auf. An diesem treten Verluste und Spannungsabfall auf.

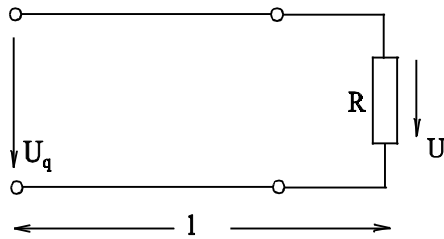


Bild EG48A

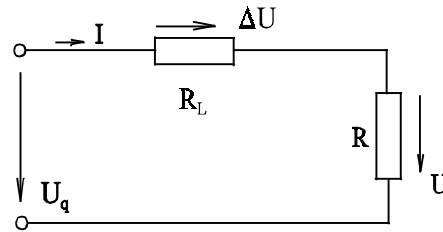


Bild EG47B

Das Bild EG48A kann durch ESB Bild EG48B ersetzt werden.

Der Leistungswiderstand R_L berechnet sich zu:

$$R_L = \frac{2 \cdot l}{\kappa \cdot A}$$

Verhältnisse:

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{R_L}{R}$$

$$P_V = I^2 \cdot R_L$$

$$P = I^2 \cdot R$$

$$\frac{P_V}{P} = \frac{I^2 \cdot R_L}{I^2 \cdot R} = \frac{R_L}{R}$$

$$\frac{P_V}{P} = \frac{\Delta U}{U} = \frac{R_L}{R} = x$$

Das Verhältnis von Verlustleistung zur Nutzleistung ist gleich dem Verhältnis des Spannungsabfalls der Leitung zur Verbraucherspannung und wird mit x abgekürzt.

Mit $R = \frac{U^2}{P}$ und $R_L = \frac{2 \cdot l}{\kappa \cdot A}$

kann ersetzt werden:

$$x = \frac{R_L}{R} = \frac{\frac{2 \cdot l}{\kappa \cdot A}}{\frac{U^2}{P}} = \frac{2 \cdot l \cdot P}{\kappa \cdot A \cdot U^2}$$

$$x = \frac{\Delta U}{U} = \frac{P_V}{P} = \frac{2 \cdot l \cdot P}{\kappa \cdot A \cdot U^2}$$

Fazit: Der Spannungsabfall sollte möglichst gering sein, damit auch das x der oberen Formel. Dieses erreicht man bei gegebener Länge und Leistung durch einen größeren Querschnitt oder durch eine höhere Übertragsspannung. Einen größeren Querschnitt zu wählen ist unwirtschaftlich wie auch das folgende Beispiel zeigt. Dieses ist der Grund, warum bei Drehstromnetzen die Übertragung mit hoher Spannung erfolgt. Die spezifische Leitfähigkeit κ kann wenig beeinflusst werden, entweder erfolgt die Übertragung über Kupferleitungen ($\kappa^{\text{Cu}} = 56 \cdot 10^6 \text{ S/m}$) oder über Aluminiumleitungen ($\kappa^{\text{AL}} = 36 \cdot 10^6 \text{ S/m}$).

Beispiel:

gegeben: Cu-Leitung $\Rightarrow \kappa = 56 \frac{m}{\Omega \cdot mm^2}$
 $l = 1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$
 $P = 100 \text{ kW}$
 $5 \% \text{ Verluste} \Rightarrow x = 0.05$
 $U = 100 \text{ V}$

gesucht: A

Lösung: $x = \frac{2 \cdot l \cdot P}{\kappa \cdot A \cdot U^2}$
 $A = \frac{2 \cdot l \cdot P}{\kappa \cdot U^2 \cdot x} = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot 10 \cdot 10^3 \text{ VA}}{56 \frac{m}{\Omega \cdot mm^2} \cdot (100 \text{ V})^2 \cdot 0.05} = 7143 \text{ mm}^2 = 71 \text{ cm}^2$

\Rightarrow viel zu großer Querschnitt

\Rightarrow U erhöhen, bei Gleichstrom aufwendig

5. Sonderabschnitte

5.1. Leiter, Halbleiter, Isolatoren

5.1.1. Bereiche des spezifischen Widerstandes

Leiter, Halbleiter und Isolatoren unterscheiden sich bei Raumtemperatur in der Größe des spezifischen Widerstandes ρ , siehe Bild EG511A.

Leiter	- kleiner spezifischer Widerstand	- hohe Leitfähigkeit
Halbleiter	- mittlerer spezifischer Widerstand	- mittlere Leitfähigkeit
Isolatoren	- hoher spezifischer Widerstand	- kleine Leitfähigkeit

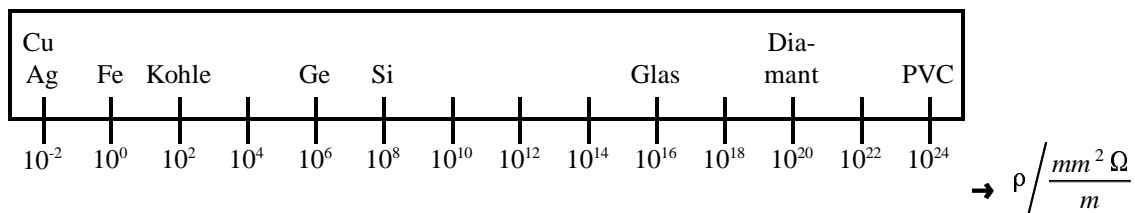


Bild EG511A

Beispiel: Aufgabe 5.1.1

gegeben:	$l = 1 \text{ m}$	$A = 1 \text{ mm}^2$
	$\rho_{\text{Leiter}} = 0.1 \Omega \text{mm}^2/\text{m}$	$U_{\text{Leiter}} = 0.1 \text{ V}$
	$\rho_{\text{HL}} = 10^8 \Omega \text{mm}^2/\text{m}$	$U_{\text{HL}} = 100 \text{ V}$
	$\rho_{\text{iso1}} = 10^{16} \Omega \text{mm}^2/\text{m}$	$U_{\text{iso}} = 100 \text{ kV}$
	$\rho_{\text{iso2}} = 10^{24} \Omega \text{mm}^2/\text{m}$	

gesucht: $m = \frac{\text{Elektronen}}{s}$

Lösung: $R = \rho \cdot \frac{l}{A}$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U \cdot A}{\rho \cdot l} = \frac{Q}{t} = q \cdot m$$

$$\frac{U \cdot A}{\rho \cdot l} = q \cdot m$$

$$m = \frac{U \cdot A}{\rho \cdot l \cdot q}$$

$$m_{\text{Leiter}} = \frac{0.1 \text{ V} \cdot 1 \text{ mm}^2}{0.1 \frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot 1 \text{ m} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}}$$

$$m_{\text{Leiter}} = 6 \cdot 10^{18} \frac{\text{Elektronen}}{s}$$

$$m_{\text{HL}} = 6 \cdot 10^{12} \frac{\text{Elektronen}}{s}$$

$$m_{\text{iso1}} = 63 \cdot 10^6 \frac{\text{Elektronen}}{s}$$

$$m_{\text{iso2}} = 0.625 \frac{\text{Elektronen}}{s}$$

Obwohl die Spannungen an Leiter, Halbleiter und Isolatoren unterschiedlich sind, stellen sich erhebliche unterschiedliche Ströme (Anzahl der Elektronen) ein. Bei der höheren Spannung stellt sich aufgrund der niedrigen Leitfähigkeit der kleinste Strom ein.

5.1.2. Bändermodell

In diesem Abschnitt soll versucht werden, das im letzten Abschnitt festgestellte unterschiedliche Leitfähigkeitsverhalten zu erklären. Dazu werden die Energiezustände der Atome (und Moleküle) untersucht.

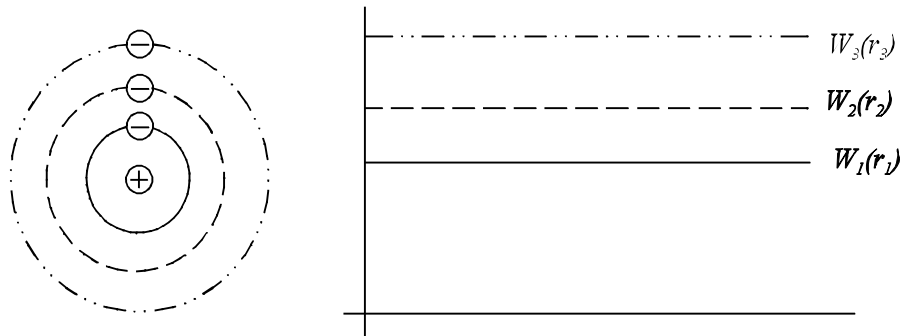


Bild EG512A: Diskrete Atombahnen und Energie des Einzelatoms

Die Elektronen der Einzelatome können nur gewisse Radien und damit auch nur gewisse Energieniveaus annehmen (Physik). Trägt man die Energie in einem Diagramm auf, wird dieses durch diskrete (einzelne) Energieniveaus dargestellt, siehe Bild EG512A.

Mechanischer Vergleich:

1 Pendel	→	1 Frequenz
2 gleiche Pendel, nicht gekoppelt	→	1 gleiche Frequenz
2 gleiche Pendel, gekoppelt	→	2 ungleiche Frequenzen
3 gleiche Pendel, gekoppelt	→	3 ungleiche Frequenzen
n gleiche Pendel, gekoppelt	→	n ungleiche Frequenzen

Auch bei Atomen (Molekülen) im Kreisfallverbund erfolgt wegen der Kopplung eine Aufspaltung der Energieniveaus. In einem Kreisfallverbund ($n \approx 10^{29}/\text{m}^3$) ergeben sich damit sehr viele Energieniveaus, die ganz dicht neben einander liegen, siehe Bild EG512B. Man kann also von einem Energieband sprechen. Ein Atom hat mehrere Elektronenschalen und daher auch mehrere Energiebänder.

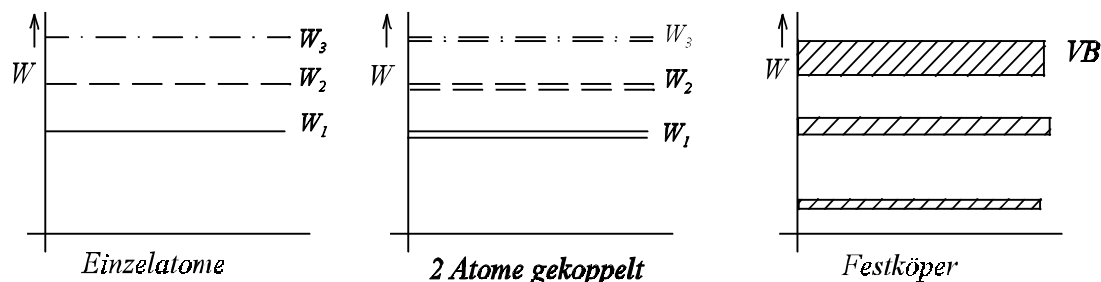


Bild EG512B

Welche Elektronen tragen zum Stromtransport und somit zur Leitfähigkeit bei? Antwort: Die Elektronen auf der äußersten Schale. Das sind die Elektronen, die sich im oberen Energieband befinden. Die äußersten Elektronen werden auch Valenzelektronen genannt. Das Energieband heißt danach **Valenzband (VB)**. Frage: Wie unterscheiden sich nun Leiter, Halbleiter und Isolatoren in den Energiebändern. Dazu gibt es außer den vorhandenen Energiebändern der Atome auch noch ein **Leitungsband**. In diesem Leitungsband müssen sich die Elektronen befinden, oder auf dieses Energieniveau angehoben werden, damit die Elektronen zum Stromtransport beitragen können. Die Lage von Leiterband und Valenzband bei den unterschiedlichen Leitungsarten zeigt Bild EG512C.

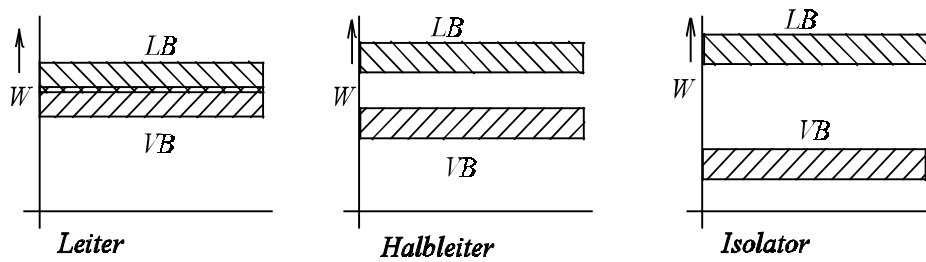


Bild EG512C

- Leiter:** Valenzband (VB) und Leiterband (LB) überlappen sich.
- Halbleiter:** VB und LB überlappen sich nicht. Der Energieabstand zwischen VB und LB ist nicht so groß, daß durch thermische Energie einige Elektronen von VB ins LB gelangen können.
- Isolatoren:** VB und LB liegen soweit auseinander, daß durch thermische Energie nur sehr sehr wenige Elektronen vom VB ins LB gelangen können.

5.1.3. Die elektrische Leitfähigkeit

Mit dem bekannten ohmschen Gesetz und dem Widerstand eines Leiters gleichen Querschnitts

$$U = I \cdot R \qquad R = \frac{l}{\kappa \cdot A}$$

ergibt sich durch Umformung

$$U = I \cdot \frac{l}{\kappa \cdot A}$$

$$\kappa \frac{U}{l} = \frac{I}{A}$$

und Ersetzen von

$$\frac{U}{l} = E \qquad \frac{I}{A} = J$$

das ohmsche Gesetz in Elementarform:

$$J = \kappa \cdot E$$

$$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$$

Aus Abschnitt 2.1.9 ist bekannt:

$$I = q \cdot n \cdot A \cdot v$$

$$J = \frac{I}{A}$$

$$J = q \cdot n \cdot v = \kappa \cdot E$$

Damit ist im linearen Fall ist die Geschwindigkeit der Elektronen proportional zur angelegten Feldstärke:

$$v \sim E$$

oder ausgedrückt mit der Proportionalitätskonstanten b

$$v = b \cdot E$$

$$b - \text{Elektronenbeweglichkeit} \qquad [b] = \frac{[v]}{[E]} = \frac{m/s}{V/m} = \frac{m^2}{Vs}$$

Aus dem Vergleich der beiden Gleichungen

$$J = q \cdot n \cdot v = q \cdot n \cdot b \cdot E$$

$$J = \kappa \cdot E$$

ergibt sich die elektrische Leitfähigkeit zu:

$$\kappa = q \cdot n \cdot b$$

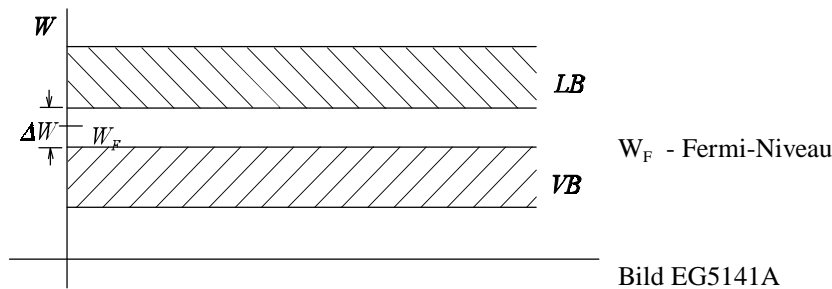
Die elektrische Leitfähigkeit ist somit abhängig von

- Anzahl der Ladungsträger
- Beweglichkeit der Ladungsträger

Bei den einzelnen Leitungsarten (Leiter, Halbleiter, Isolator) weisen die oben angeführten beiden Eigenschaften unterschiedliches Verhalten auf. Dieses soll in den nächsten Abschnitten erläutert werden.

5.1.4. Halbleitung

5.1.4.1. Eigenleitung



Halbleiter bestehen aus Elementen der 4. Gruppe im Periodensystem (Ge, Si, Se) oder aus Molekülverbindungen der 3. und 5. Gruppe des Periodensystems (GaAs, InSp). Je nach Material weisen die Halbleiter eine unterschiedliche Differenz ΔW zwischen Leitungsband (LB) und Valenzband (LB) auf, siehe Tabelle 5.1.

HL	Se	Ge	Si	GaAs	Isolator	InSp
$\Delta W/\text{eV}$	2.20	0.72	1.12	1.38	3...6	0.2

Tabelle 5.1: Energie-Differenz zwischen Leitungs- und Valenzband bei verschiedenen Halbleitern

Nun sind statistisch gesehen nicht alle Elektronen auf dem gleichen Energieniveau. Um dieses zu erklären, muß ein wenig Wahrscheinlichkeitsrechnung erläutert werden. Dazu soll an einem einfachen Beispiel die Verteilung der Noten in einer Klausur nach Bild EG5141B betrachtet werden.

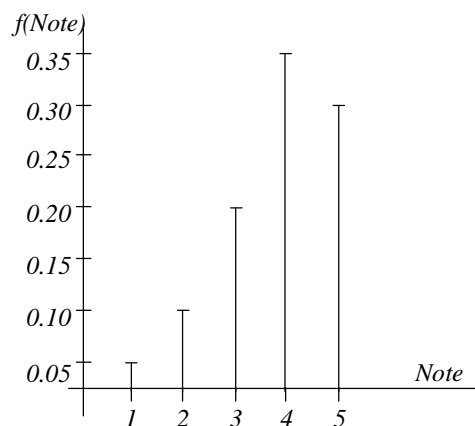


Bild EG5141B: Beispiel einer Notenverteilung (Wahrscheinlichkeitsdichte)

In Bild EG5141B ist die Wahrscheinlichkeit dargestellt, welche Note zu erwarten ist. Man spricht von Wahrscheinlichkeitsdichte. Aus Bild EG5141B ist ablesbar:

Note	Wahrscheinlichkeitsdichte $f(\text{Note})$
1	$0.05 \triangleq 5 \%$
2	$0.1 \triangleq 10 \%$
3	$0.2 \triangleq 20 \%$
4	$0.35 \triangleq 35 \%$
5	$0.3 \triangleq 30 \%$

Aus Bild EG5141B ist ebenso ablesbar, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, eine Note gleich oder besser einer bestimmten Note zu erwarten. Somit kann die Wahrscheinlichkeit angegeben werden:

Note	Wahrscheinlichkeit F(Note)
1	0.05 \triangleq 5 %
2	0.15 \triangleq 15 %
3	0.35 \triangleq 35 %
4	0.70 \triangleq 70 %
5	0.3 \triangleq 100 %

Die obere Tabelle in ein Diagramm umgesetzt, ergibt das Bild EG5141C.

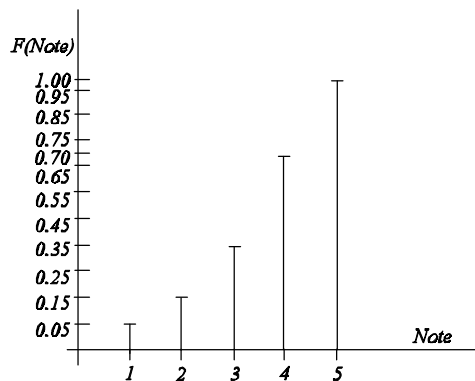


Bild EG5141C: Beispiel der Wahrscheinlichkeit eine Note besser oder gleich einer bestimmten Note zu bekommen nach der Notenverteilung von Bild EG5141B

Der Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(\text{Note})$ und Wahrscheinlichkeit $F(\text{Note})$ ist durch die folgende Summe gegeben:

$$F(\text{Note}) = \sum_{i=1}^{\text{Note}} f(i)$$

Aus der Bedingung, daß eine Note besser gleich "5" ist, 100 % beträgt, ergibt sich

$$F(\infty) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i) = 1$$

Das obige Beispiel war ein diskretes, d.h. es gibt endlich viele Noten (Abszissen-Werte).

In der Technik ist meist eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeit vorhanden, d.h. in einem bestimmten Bereich kann ein physikalischer Wert x , statistisch gesehen, jede Größe annehmen. Die diskreten Verteilungen nach den Bildern EG5141B und EG5141C geben in kontinuierliche Verläufe über. Der Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ und der Wahrscheinlichkeit $F(x)$ geht von der Summen über in das folgende Integral:

$$F(x) = \sum_{x^*=-\infty}^{+\infty} f(x^*) dx^*$$

Da wiederum gilt die Wahrscheinlichkeit 100 %, daß ein Wert x kleiner gleich ∞ ist:

$$F(\infty) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Zurück zum Problem der Eigenleitung von Halbleitern. Nach der **Fermi-Verteilung** (hier nicht hergeleitet)

$$f(W) = \frac{1}{1 + \exp \frac{W - W_F}{kT}}$$

$$k = 8.6 \cdot 10^{-5} \frac{eV}{K}$$

$$k \cdot T_0 = 0.026 eV$$

weisen die Elektronen eine unterschiedlichen Energieverteilung auf, siehe Bild EG5141D. Das Fermi-Niveau liegt in der Mitte zwischen LB und VB.

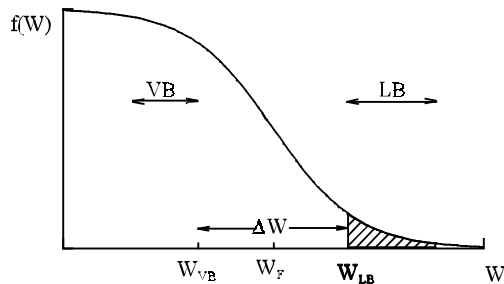


Bild EG5141D: Wahrscheinlichkeitsschichte der Energie der Elektronen im Halbleiter

Die schraffierte Fläche in Bild EG5141D entspricht der Anzahl der Elektronen, die eine Energie aufweisen, damit sich diese im Leitungsband befinden. Dieser Anteil kann zur Stromleitung betragen. Den Einfluß der Temperatur zeigt Bild EG5141E.

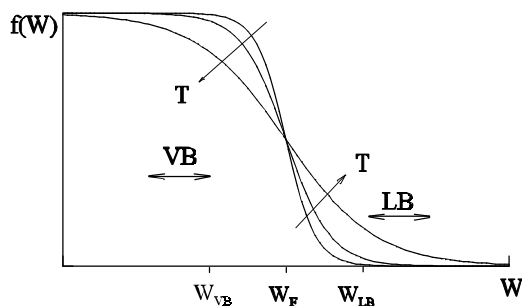


Bild EG5141E: Einfluß der Temperatur auf die Energieverteilung der Elektronen

Mit zunehmender Temperatur steigt bei Halbleitern die Anzahl der Elektronen im Leitungsband exponentiell an. Da die Beweglichkeit in gleicher Größenordnung bleibt, steigt die Leitfähigkeit bei Halbleitern auch exponentiell an. Die obere Formel für die Anzahl der freien Ladungsträger-Wahrscheinlichkeitsschichte kann für die folgenden Extremfälle sehr gut angenähert werden:

$$W \gg W_F \quad f(W) \approx \exp \left[-\frac{W - W_F}{kT} \right] \quad (A)$$

$$W \ll W_F \quad f(W) \approx 1 - \exp \left[\frac{W - W_F}{kT} \right] \quad (B)$$

Im Bereich des Leitungsbandes von Halbleitern gilt die Gleichung (A). Nach Bild EG5141D und Gleichung (A) haben die meisten Elektronen weniger Energie als die unterste Grenze des LB, aber einige wenige sind noch im LB vorhanden. Man spricht von Eigenleitung der Halbleiter.

Bei $T \approx 0$ befinden sich nach Gleichung (A) wegen $e^{-\infty}$ keine Elektronen im Leitungsband. Dagegen steigt mit

zunehmender Temperatur die Anzahl der Elektronen im Leitungsband und somit auch die Leitfähigkeit.

$T \approx 0 \Rightarrow$ Isolator

$T \gg T_0 \Rightarrow$ bessere Leitführung

Als Beispiel die Daten der Eigenleitung von GE und SI bei **Raumtemperatur**:

SI	20°C	$n_i = 6.8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$	n_A
GE	20°C	$n_i = 2.4 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$	$n_A = 4.4 \cdot 10^{22} \text{ Atome/cm}^3$

n_A - Anzahl der Atome

n_i - Anzahl der Elektronen im LB bei Eigenleitung

Damit trägt bei GE nur jedes 10^9 -te Atom zur Eigenleitung bei.

Generation, Rekombination

Die Energie der Elektronen ist aufgrund von Energieaustausch im Kristallverbund zeitlich nicht konstant.

Erhält ein Elektron eine höhere Energie als die Untergrenze des Leitungsband "entsteht" ein neuer freier Ladungsträger. Man spricht von Ladungsträger-Generation. Dieser Vorgang wird in Bild EG5141F im Kristallverbund dargestellt und in Bild EG5141G im Bändermodell. Im Kristallverbund entspricht die Generation ein Lösen des Elektrons aus der Bindung. Verliert das Elektron durch Energieaustausch wieder an Energie, fällt es in das Valenzband zurück. Dieser Vorgang wird Rekombination genannt und ist die Umkehrung der Generation. Im Bändermodell entspricht die Rekombination dem Übergang von Leitungsband in das Valenzband, siehe Bild EG5141G. Im Kristallverbund bewirkt dieser Vorgang das "Einfangen" eines Elektrons in ein vorher frei gewordenes "Loch"

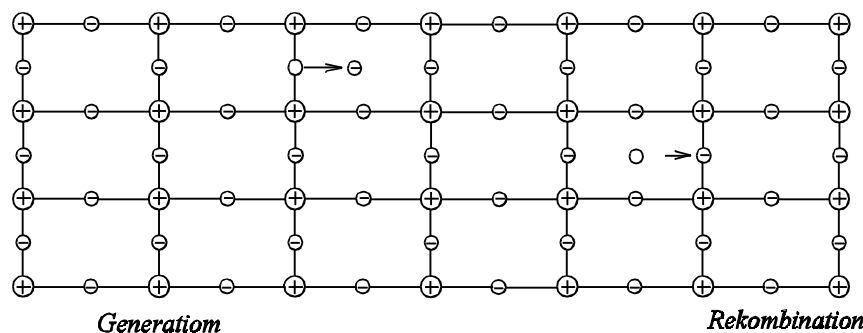


Bild EG5141F: Generration und Rekombination von Ladungsträgern im Kristallverbund

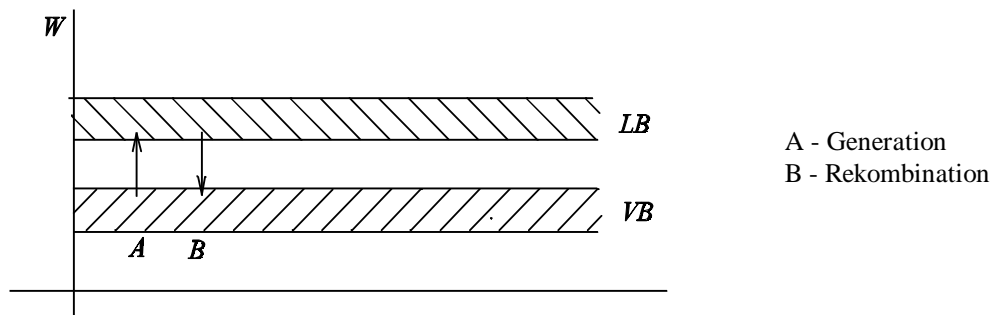


Bild EG5141G: Generation (A) und Rekombination (B) von Ladungsträgern im Bändermodell

Zusammenfassung:

Übergang	VB	→	LB	\Rightarrow Generation	Elektron wird aus Kristallverbund gelöst
Übergang	LB	→	VB	\Rightarrow Rekombination	Elektron wird wieder vom Kristallgitter eingefangen

5.1.4.2. Störstellenleitung

Die Bedeutung der Halbleiter ergab sich erst durch Störstellenleitung (die Störstellenleitfähigkeit).

Dotieren: Zugabe von fünfwertigen oder dreiwertigen Elementen in den vierwertigen Kristallverbund

10^{13} bis 10^{20} Fremdatomen/cm³

bei etwa 10^{22} Eigenatomen/cm³

5.1.4.2.1. n-Leitung

fünfwertige Elemente zugaben

=>

Donatar:

As - Arsen

Sb - Antimon

p - Phosphor

Das 5. Elektron steht fast frei zur Verfügung.

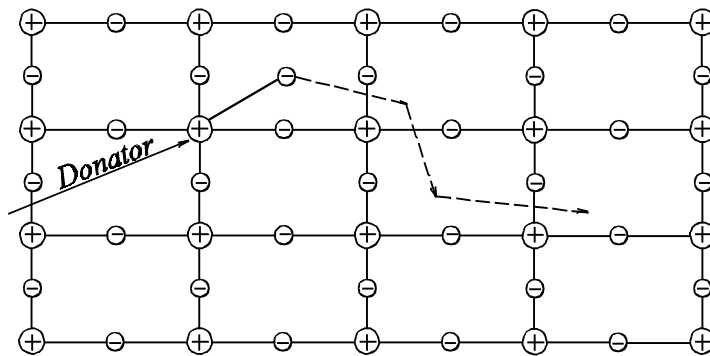


Bild EG51421A: n-Leitung der Störstellen im Kristallverbund

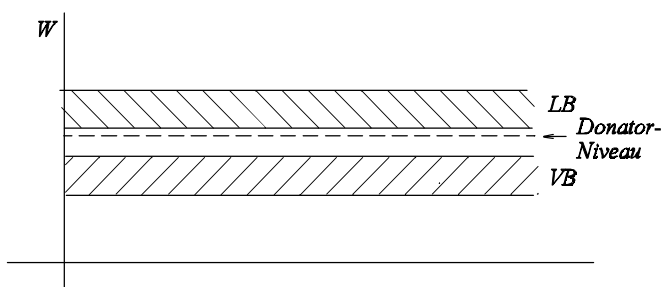


Bild EG51421B: Donatar-Niveau, n-Leitung im Bändermodell

Die Energie um vom Donatar-Niveau ins LB zu gelangen, ist wesentlich geringer als die vom VB ins LB (etwa 1/36). Da der Abstand im Bändermodell geringer ist, gelangen auch mehr Elektronen ins Leitungsband.

5.1.4.2.2. p-Leitung

dreiwertige Elementen zugeben \Rightarrow Akzeptor: Ga - Gallium
 In - Indium
 Al - Aluminium
 B - Bor

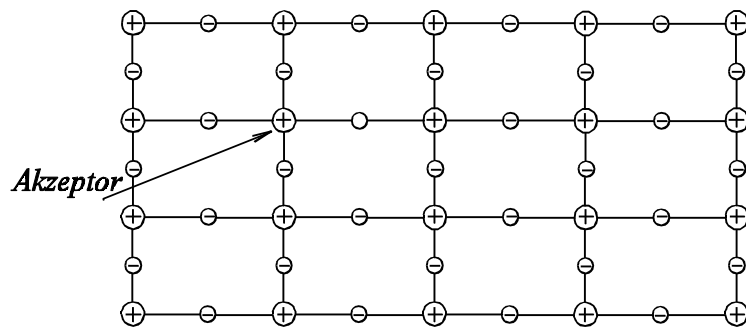


Bild EG51422A: p-Leitung der Störstellen im Kristallverbund

Es fehlt ein Elektron im Gitter. In diesem "Loch" können Fremdelektronen ihren Platz einnehmen. Wo kommen diese Fremdelektronen her? Diese können sich von Loch zu Loch durch hangeln. Dieser Vorgang wird genannt:

p-Leitung
 Mangel-Leitung
 Defekt-Leitung
 Löcher-Leitung

Im Festkörper gibt es physikalisch nur die Bewegung von Elektronen und damit negativen Ladungsträgern. Betrachtet man den Akzeptor mit dem Elektronen-Loch, so wirkt dieser wegen der einen fehlenden negativen Ladung als positive Ladung. Wandert nun das Elektron als tatsächlich existierende physikalische Ladung von Atom zu Atom, so bewegt sich das Loch als virtuelle positive Ladung in die entgegengesetzte Richtung.

Hier handelt es sich also im Prinzip um die Bewegung von positiven Ladungsträgern. Anschaulich am besten erläutern läßt sich dieses mit Hilfe einer aufsteigenden Luftblase im Wasser. Will man die Bewegung des Wassers beschreiben, ist dieses nicht so ohne weiteres möglich. Einfacher wird es, wenn man die Bewegung der Luftblase beschreibt.

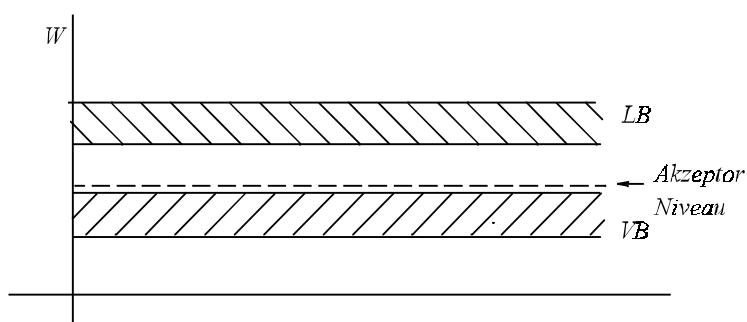


Bild EG51422B: Akzeptor-Niveau im Bändermodell

Im Bändermodell liegt das Akzeptor-Niveau kurz oberhalb des VB. Bei der p-Leitung ist alles umgekehrt. So muß hier das Elektron ins VB verschwinden (vom Atom eingefangen werden), damit ein positiver Ladungsträger (Loch) entsteht.

In den weiteren Abschnitten wird bei der p-Leitung nur noch die Bewegung von positiven Ladungsträgern diskutiert.

5.1.4.2.3. Raumladung

Die bislang betrachteten Halbleiter weisen im Normalfall keine Raumladung auf. Die Raumladung ρ gibt die nach außen hin wirksame Ladung pro Volumen an:

$$[\rho] = \frac{As}{m^3} = \frac{C}{m^3}$$

Die Raumladung wird in Kap. 8.4 (2. Semester) behandelt. Zieht man bei n-Halbleitern die Elektronen des Leitungsbandes heraus (Grund später), bleiben die positiven Kernladungen zurück. Es sind mehr positive Ladungen als negative Elektronen vorhanden. Der n-Halbleiter kann damit eine positive Raumladung aufweisen. Beim p-Halbleiter können die Löcher mit Elektronen besetzt werden (Grund auch später). Die zusätzlichen Elektronen können damit beim p-Halbleiter eine negative Raumladung bewirken.

5.1.5. Der p-n-Übergang

A] ohne Anlegen einer Spannung

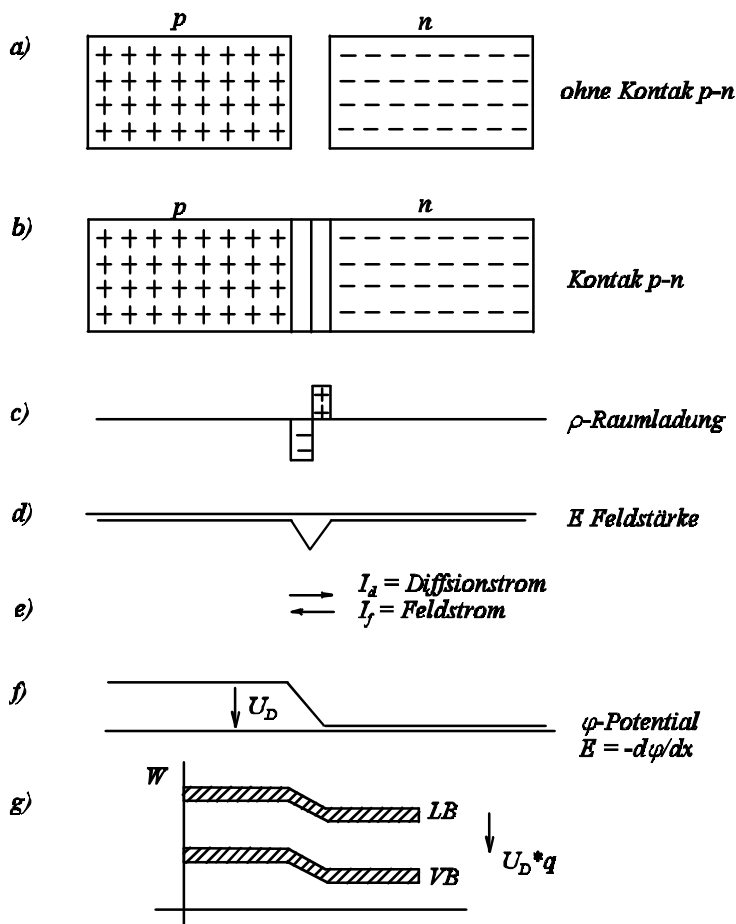


Bild EG515A : p-n-Übergang (Erklärung siehe nächste Seite)

- a) p- und n-Gebiet getrennt
- b) p- und n-Gebiet in Kontakt
- c) Raumladung
- d) Feldstärke
- e) Diffusionsstrom, Feldstrom
- f) Potential
- g) Bändermodell

Erklärung zu Bild EG515A:

- a) Ohne Kontakt sind die Ladungsträger im p-Gebiet und im n-Gebiet gleichverteilt. Es tritt keine Raumladung ρ auf. Die Symbole “+” und “-” stehen nicht für die Raumladung, sondern für die Art der Dotierung. Das Zeichen “+” deutet einen p-Halbleiter an und das Zeichen “-” einen n-Halbleiter.
- b) Bringt man p-Gebiet und n-Gebiet in direktem Kontakt, entsteht an der Kontaktstelle eine sehr unterschiedliche Konzentration an Ladungsträgern. Im p-Gebiet (auf der linken Seite) sind positive Ladungsträger vorhanden und im n-Gebiet negative Ladungsträger. In jedem physikalischen System versuchen sich unterschiedliche Konzentrationen auszugleichen. Diesen Vorgang nennt man Diffusion. damit wandern in der Nähe der Kontaktzone Ladungsträger von einem Gebiet ins andere. Die Überschuß-Elektronen des n-Gebietes füllen die Löcher des p-Gebietes. In der Kontaktzone sind somit keine Ladungsträger mehr vorhanden.
- c) Durch die unter b) erläuterte Diffusion der Ladungsträger entsteht eine Raumladung. Die ins p-Gebiet diffundierten Elektronen des n-Gebietes bewirken im p-Gebiet eine negative Raumladung. Die ins n-Gebiet diffundierten Löcher des p-Gebietes bewirken im n-Gebiet eine positive Raumladung. Zur einfacheren Darstellung und einfacheren Erläuterung ist in Bild EG515A die Funktion der Raumladung rechteckförmig angenommen. In Realität ist diese Funktion eine etwas kompliziertere stetige Funktion. Die angenommene Funktion ist aber ausreichend, um die auftretenden Effekte zu erläutern. Beim dargestellten Beispiel ist die Dotierung und damit die Anzahl der Ladungsträger im n-Gebiet und im p-Gebiet gleich. Dieses bewirkt beim Beispiel eine gleiche Ausdehnung der beiden Raumladungszonen in die jeweiligen Gebiete. In der Praxis wird die Dotierung recht unterschiedlich gestaltet. Ein paar Zahlenwerte:

d_0	-	einige μm	-	Dicke der Raumladungszone
E	-	zu einigen 1000 kV/cm	-	Feldstärke (siehe auch d)

- d) Eine Grundgleichung der theoretischen Elektrotechnik in einer Dimension (x-Richtung) lautet (Herleitung erst im 3. Semester, Kap. 9.17) :

$$E = \int (\rho/\epsilon) dx$$

ρ - Raumladung
 E - Feldstärke
 x - Orts-Koordinate
 ϵ - Dielektrizitätskonstante

Die grafische Integration des Teilbildes c ergibt das Teilbild d.

- e) Aufgrund der Feldstärke aus d ergibt sich ein Strom, der sogenannte Feldstrom I_f . Der Stromkreis ist nicht geschlossen, wie kann ein Feldstrom fließen ? Der Ausgleich geschieht durch Diffusion. Aufgrund der unterschiedlichen Ladungsträger-Konzentration versucht sich ein Gleichgewicht einzustellen, der sogenannte Diffusionsstrom I_D . Feldstrom I_f und Diffusionsstrom I_D überlagern sich. Als Summe fließt kein Strom.
- f) Eine weitere Grundgleichung der theoretischen Elektrotechnik (Herleitung in Kap. 4.1.2), wenn nur die Dimension x eine Abhängigkeit aufweist, lautet:

$$\varphi = - \int E dx \quad \varphi \text{ - Potential}$$

Durch grafische Integration von E (Teilbild d) erhält man das Teilbild f. Die Integration einer abschnittsweisen linearen Funktion ergibt parabelförmige Abschnitte. Wegen der einfacheren Darstellung wird der Verlauf durch abschnittsweise Geraden dargestellt. Tatsächlich ist die Funktion in der ersten Ableitung stetig. Zwischen p- und n-Gebiet besteht demnach die Potentialdifferenz U_D :

$$U_D \text{ - Diffusionsspannung } 0.5 \dots 1 \text{ V}$$

- g) Durch U_D wird die Energie im Bändermodell zwischen p- und n-Gebiet verschoben

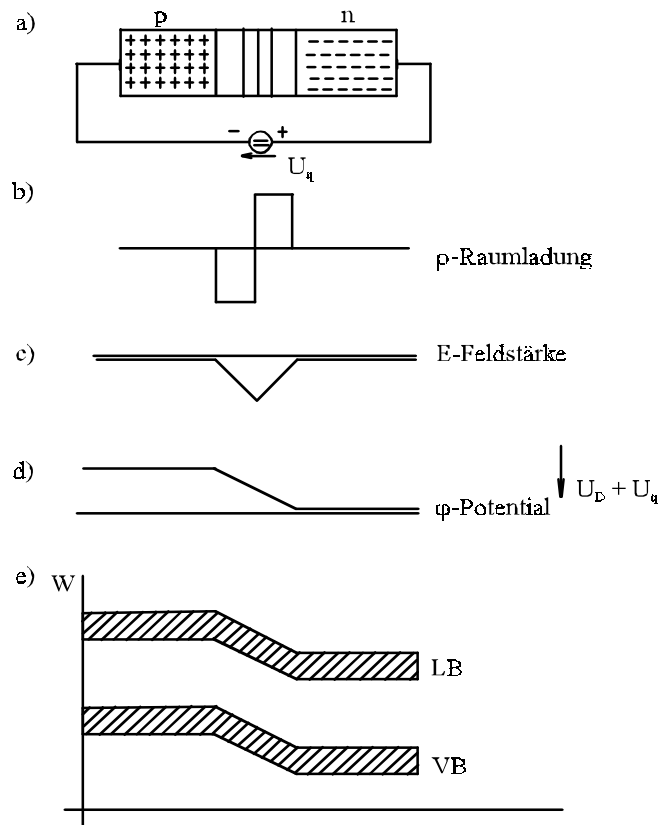
B] Spannung in Sperrrichtung

Bild EG515B: Anlegen einer Spannung in Sperrrichtung

- a) Anordnung, Ladungsträgerzustand
- b) Raumladung
- c) Feldstärke
- d) Potential
- e) Bändermodell

Durch die Spannungsquelle werden zusätzliche Ladungsträger der Sperrschicht entzogen.

- Ausdehnung der Sperrschicht
- größeres Raumladungsgebiet
- größere Feldstärke
- um U_q vergrößerte Potentialdifferenz

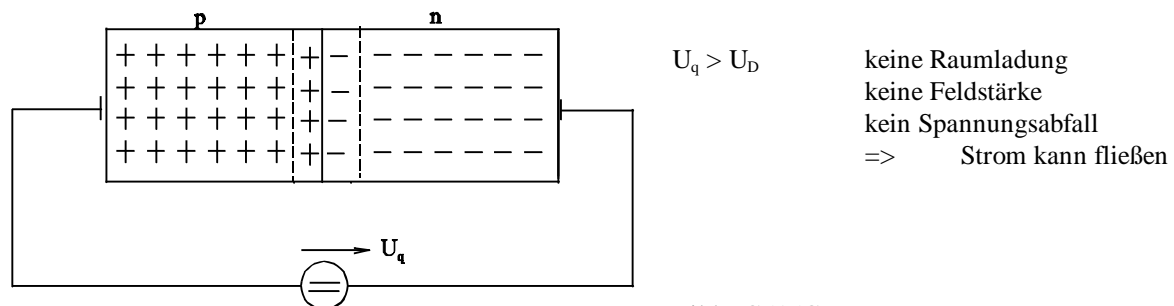
C] Spannung in Durchlaßrichtung

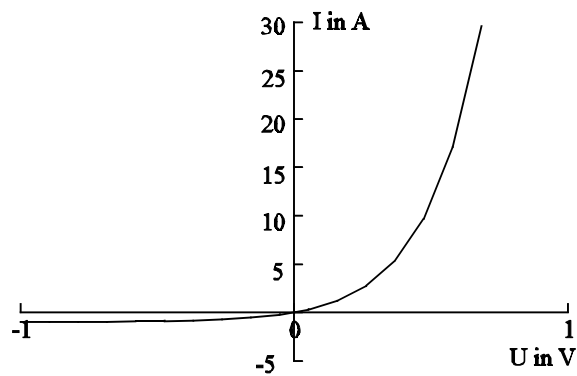
Bild EG515C

D] Eselsbrücke

Durchlaßrichtung: $+U_q$ an p, $-U_q$ an n
 Sperrrichtung: $-U_q$ an p, $+U_q$ an n

Kennlinie des p-n-Übergangs

A] Theoretische Kennlinie aufgrund der Trennschicht



$$I = I_R^* \left(e^{\frac{qU}{kT}} - 1 \right)$$

$$I = I_R^* \left(e^{\frac{U}{U_T}} - 1 \right)$$

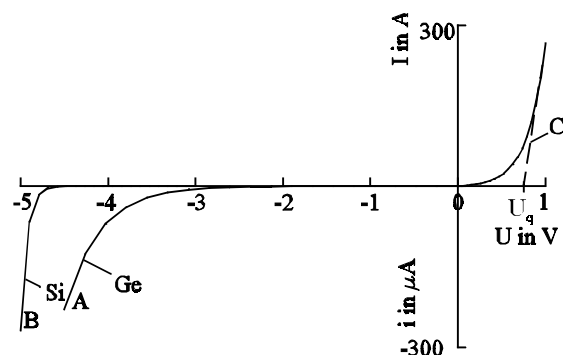
Bild EG515D: Theoretische Kennlinie des p-n-Übergangs

$\frac{kT}{q} = U_T$	$U_T = 26 \text{ mV}$	300 K
	$U_T = 30 \text{ mV}$	350 K

B] Reale Kennlinie

Praktisch haben außer dem Trennschichtverhalten noch die folgenden physikalischen Effekte Einfluß auf die Kennlinie des p-n-Übergangs:

- ohmscher Widerstand des Halbleiters (Bahnwiderstand)
- Durchbruch-Effekt (Zener-Effekt)



A:	Ge:	Durchbruch
B:	Si:	Durchbruch-Zener-Verhalten
C:		Bahnwiderstand
A,B:		Achtung: Zerstörung möglich

Bild EG515E: Reale Kennlinie des p-n-Übergangs

Die obere Kennlinie ist für die Berechnung von Schaltungen mathematisch schwer beschreibbar. Darum gibt es die verschiedene Idealisierungen.

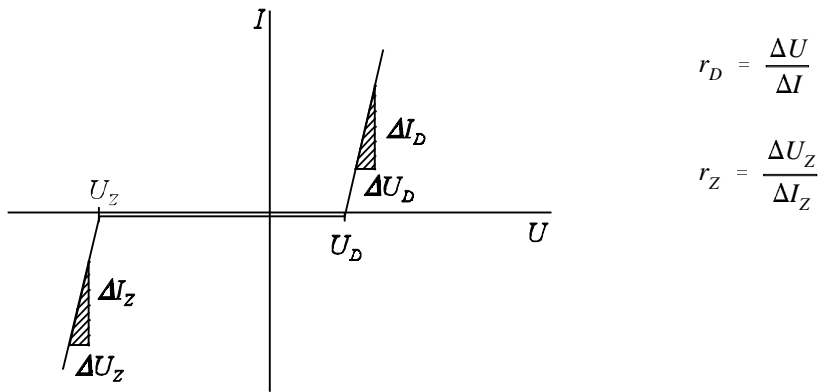
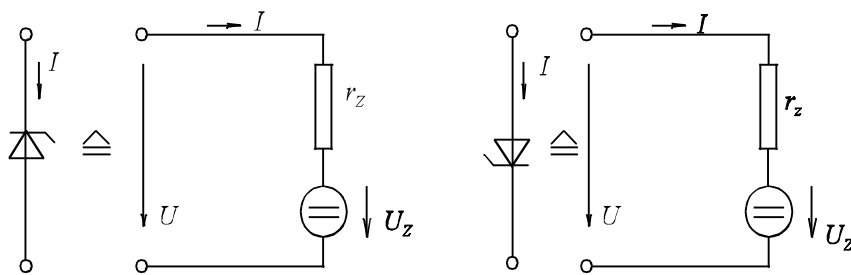


Bild EG515F: Annäherung durch Spannungsquellen und differentiellen Widerständen
 r_D - Differentieller Durchgangs (Bahn) Widerstand
 r_Z - Differentieller (Zener) Sperrwiderstand
 U_Z - Zenerspannung
 U_D - Diffusionsspannung



$U, U_Z > 0, U > U_Z, I > 0$

$U, U_Z < 0, U < U_Z, I < 0$

Bild EG515G: ESB für die Sperrrichtung, Kennlinie nach Bild EG515F

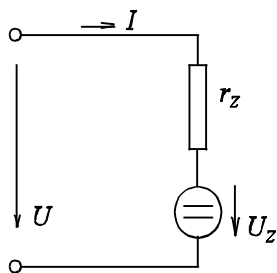


Bild EG515H: ESB für die Durchlaßrichtung, Kennlinie nach Bild EG515F

In der Energietechnik treten häufig Spannungen über 300 V auf. Dann kann die Spannung von $U_D = 0.7$ V vernachlässigt werden. Die sich ergebende stark vereinfachte Kennlinie ist in Bild EG515I dargestellt.

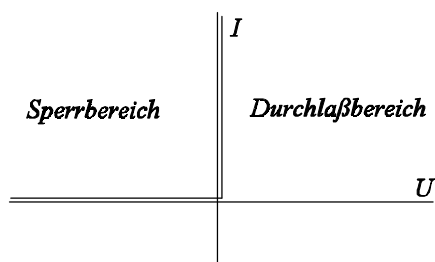


Bild EG515I: Sehr stark idealisierte Kennlinie, ideale Diode

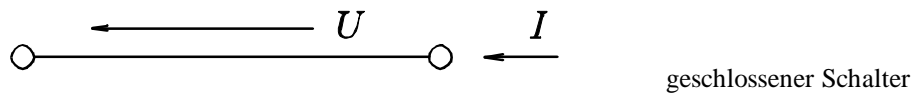


Bild EG515J: ESB im Durchlaßbereich der idealen Diode



Bild EG515K: ESB im Sperrbereich der idealen Diode

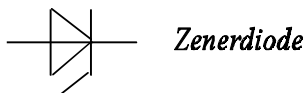
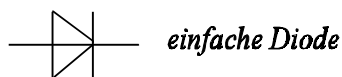
Schaltzeichen p-n-Übergang, Diode

Bild EG515L

Um Dioden mit Kennlinie nach Bild EG515F im Durchlaß- und Sperrbereich gemeinsam zu simulieren, kann ein Gesamt-ESB mit Hilfe der Bilder EG515G, EG515H und idealen Dioden angegeben werden, siehe Bild EG515M.

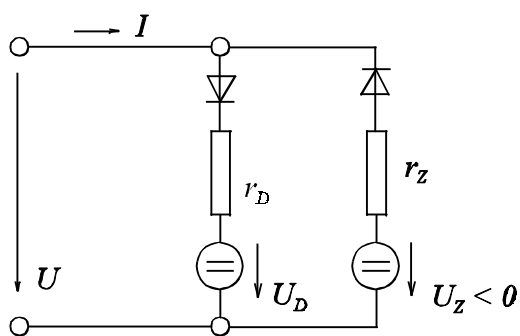


Bild EG515M: Gesamt-ESB einer realen Diode (Kennlinie nach Bild EG515F) mit idealen Dioden

Anwendung von Dioden

a) Gleichrichtung mit Diode

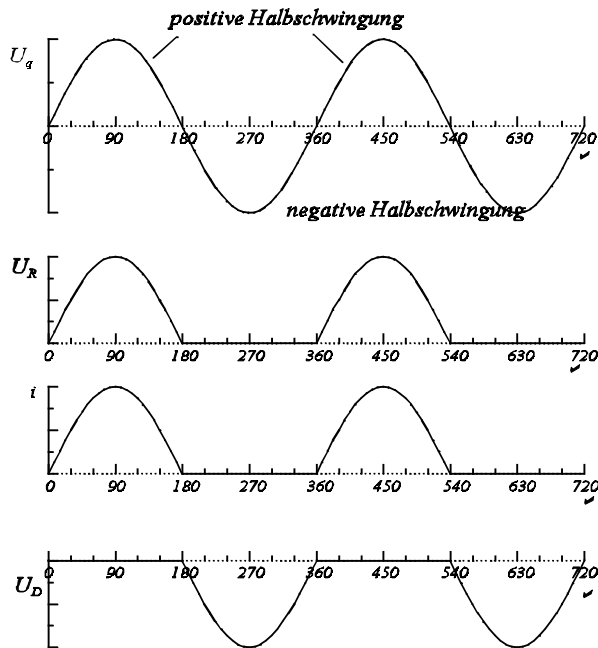
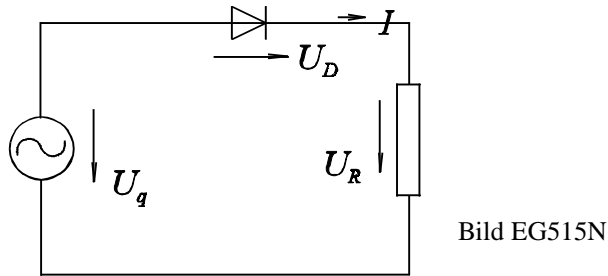


Bild EG515O: Verlauf von Strom und Spannung an einer einfachen Gleichrichterschaltung mit Diode

b) Spannungsstabilisierung mit Zenerdiode

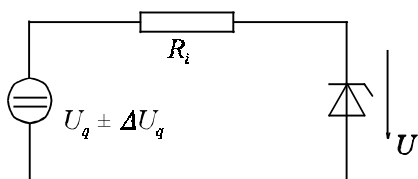
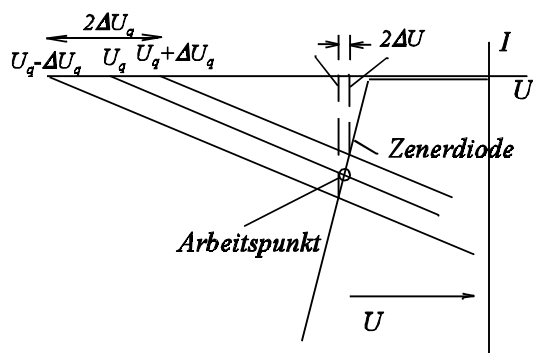


Bild EG515P



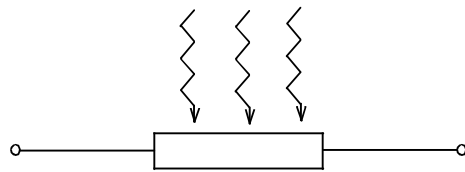
Grafische Methode siehe Kap. 5.2.1. Die relative große Schwankung ΔU_q wird durch die Zenerdiode stabilisiert (verringert).

$$\Delta U \ll \Delta U_q$$

Bild EG515K: Spannungsstabilisierung

5.1.6. Opto-Elektronik

A) Lichtabhängiger Widerstand



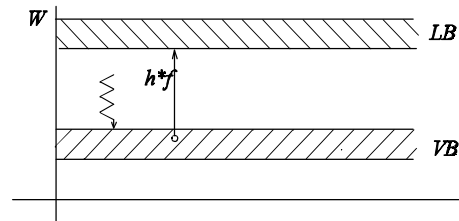
CdS Kadmium-Sulfid

 $d = 30 \dots 50 \mu\text{m}$

1500 lux

 $\Delta R/R = 10^6$

Bild EG516A



Die Energie um vom VB nach dem LB zu kommen, wird durch einen Lichtquant ($h \cdot f$) aufgebracht.

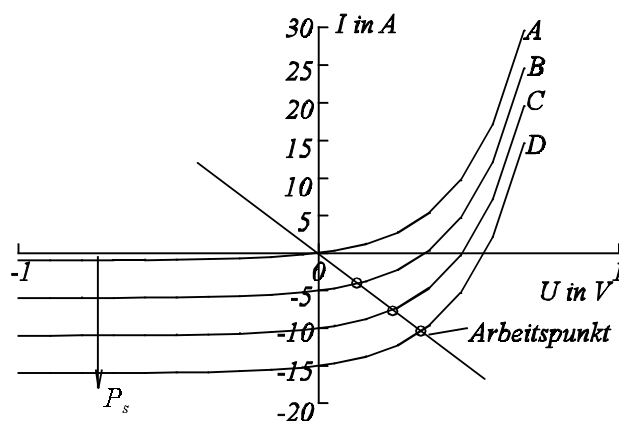
Bild EG516B

B) Foto-Element, Solar-Zelle



Ohne Strahlung (Energiezufuhr) ist die Kennlinie des normalen p-n-Übergangs vorhanden, Kennlinie A, Bild EG516D.

Bild EG516C



Durch die Anregung P_s (Strahlungsleistung) wird die Kennlinie des p-n-Übergangs nach unten verschoben. Durch grafische Methode (erst in Kap. 5.1.7) ergeben sich die Arbeitspunkte im 4. Quadranten.

Bild EG516D

$$U > 0, I < 0$$

$$\text{Energie} < 0$$

$$\Rightarrow \text{Generator}$$

Spektral empfindlich:

Si ähnlich wie Sonne $W \approx 10 \text{ mW/cm}^2$
 Ge empfindlicher weil $\Delta W = 0.72 \text{ eV} \Rightarrow$

maximale Empfindlichkeit im Roten (IR)

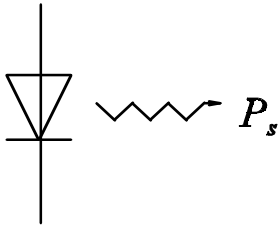
C] Leuchtdiode (LED)

Bild EG516E: Leuchtdiode

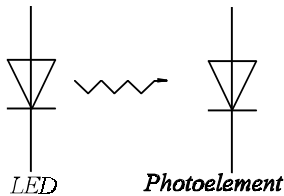
D] Optokoppler

Bild EG516D: Optokoppler

Vorteil: galvanische Trennung der Stromkreise

5.1.7. VDR-Widerstände

Voltrag Dependent Resistor

Si feinkörnig gemahlen, plastifiziert, gesimmert und kontaktiert.

Leitungsmechanismus ist noch nicht vollständig bekannt. Wahrscheinlich hebt Spannung (Feldstärke) Elektronen vom VB → LB.

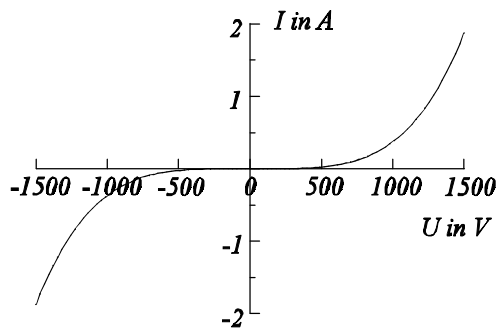


Bild EG517A: Kennlinie eines VDRs

Anwendung: Begrenzung von Überspannungen: Blitz, Abschalten induktiver Ströme.

Wirkung: Bei hohen Spannung wirkt der VDR als Quasi-Kurzschluß. Dadurch werden Überspannungen vermieden.

Die Kennlinie eines VDRs kann angenähert werden durch:

$$U = C \left(\frac{I}{1 \text{ A}} \right)^\beta$$

$$C = 20 \text{ V} \dots 1 \text{ kV}$$

$$\beta = 0.14 \dots 0.3$$

Umgestellt nach I ergibt sich:

$$I = 1 \text{ A} * \left(\frac{U}{C} \right)^{1/\beta}$$

Die Berechnung nichtlinearer Kreise (u.a. mit VDR) wird in Abschnitt 5.2 aufgezeigt.

5.2. Nichtlineare Gleichstromkreise

5.2.1. Grafische Methode

Die grafische Methode soll am linearen Beispiel erläutert werden, weil die Anschauung leichter und der Vergleich mit analytischen Berechnung möglich ist.

Lineares Beispiel:

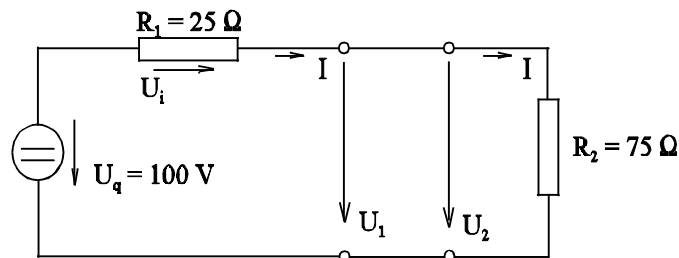


Bild EG521A

analytisch: $I = \frac{100 \text{ V}}{100 \Omega} = 1 \text{ A}$ $U_1 = U_2 = I \cdot R_2 = 75 \text{ V}$ $U_i = 25 \text{ V}$

Nach Bild EG521A ergeben sich zwei Abhängigkeiten der Spannungen U_1 und U_2 vom Strom I :

$$\begin{aligned} U_1 &= f_1(I) = U_q - R_1 \cdot I && \text{Kennlinie der Quelle} \\ U_2 &= f_2(I) = R_2 \cdot I && \text{Kennlinie der Last} \end{aligned}$$

Nach Bild EG521A sind die Spannungen U_1 und U_2 gleich. Analytisches Gleichsetzen ergibt bekanntlich den Strom I als Ergebnis. Das grafische Gleichsetzen verdeutlicht Bild EG521B. Die zwei Spannungen U_1 und U_2 werden als Funktion von I dargestellt. An der Stelle, wo $U_1 = U_2$ gilt, ist die Maschenregel erfüllt. Hier spricht man dann vom Arbeitspunkt.

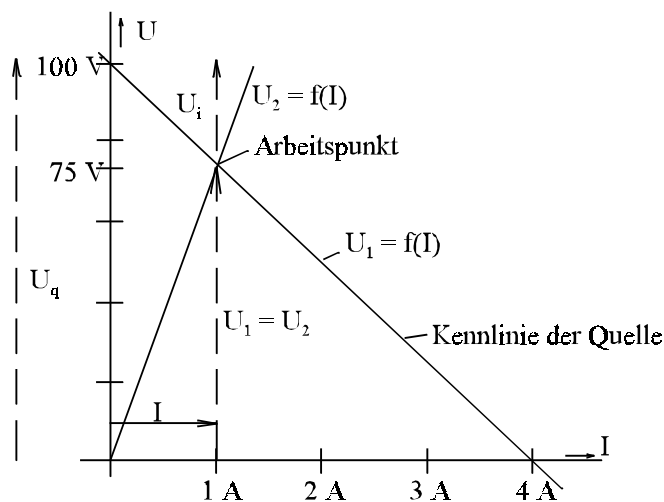


Bild EG521B: Grafische Lösung der Anordnung Bild EG521A

Die Werte I , $U_1 = U_2$, U_i lassen sich auch grafisch aus Bild EG521B ablesen.

$$\begin{aligned} U_q &= 100 \text{ V} \\ I &= 1 \text{ A} \\ U_1 &= U_2 = 75 \text{ V} \\ U_i &= 25 \text{ V} \end{aligned}$$

Anwendung: Arbeitspunkt der Diode bestimmen

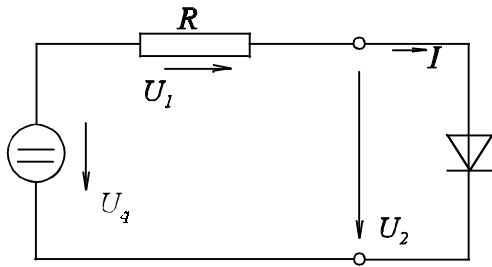


Bild EG521C

gegeben: Dioden-Kennlinie $I = f(U_2)$, Kennlinie der Quelle mit U_q und R

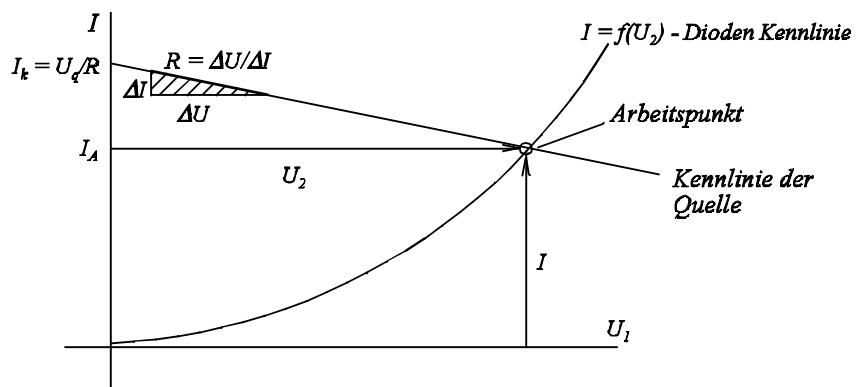


Bild EG521D

5.2.2. Grafische Reihenschaltung

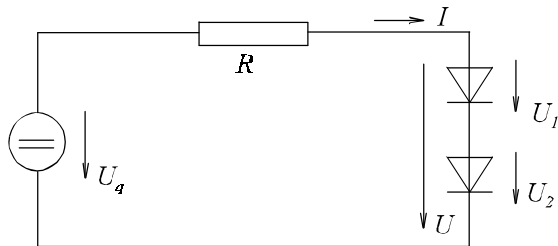


Bild EG522A

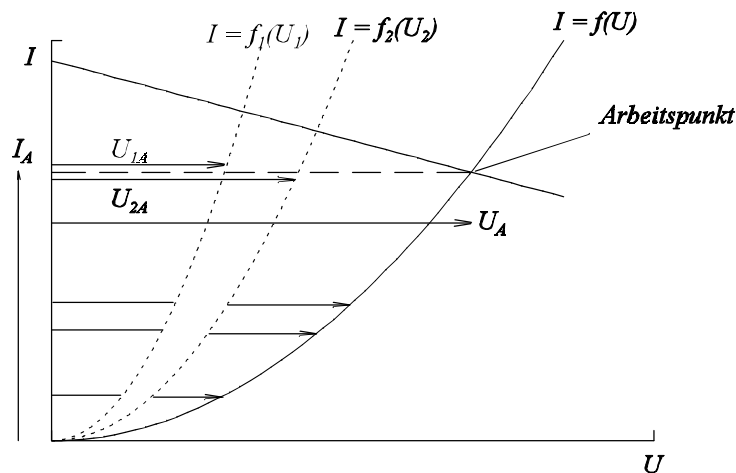


Bild EG522B: Grafische Lösung der Anordnung nach Bild EG522A

Die grafische Lösung der Anordnung nach Bild EG522A ist in Bild EG522B aufgezeigt. Folgende Schritte müssen ausgeführt werden:

- A] Die beiden Kennlinien der zwei Dioden $I = f(U_1)$ und $I = f(U_2)$ sind gegeben. In Bild EG522B sind diese gestrichelt dargestellt.
- B] Das Ziel ist, eine gemeinsame Kennlinie zu konstruieren. In einer Reihenschaltung ist der Strom gleich und die Spannungen müssen addiert werden. Dieses ist auch grafisch auszuführen. Bei gleichem Strom (waagerechte Pfeile) werden die beiden Spannungen U_1 und U_2 in U-Richtung addiert. Mathematische Erklärung:

gegeben: $I = f_1(U_1), I = f_2(U_2)$

gesucht: $I = f(U)$

Umkehrfunktion: $U_1 = g_1(I), U_2 = g_2(I)$

Masche: $U = U_1 + U_2 = g_1(I) + g_2(I) = g(I)$ *)

Umkehrfunktion: $I = f(U)$

*) Diese Addition der beiden Kennlinien in U-Richtung ist in Bild EG522B dargestellt.

- C] Mit der Gesamtkennlinie $I = f(U)$ kann der Arbeitspunkt wie in Abschnitt 5.2.1 bestimmt werden. Die Arbeitspunktgrößen lassen sich aus Bild EG522B ablesen.
- D] Zusätzlich zu Abschnitt 5.2.1 lassen sich aus Bild EG522B auch die Einzelspannung der Reihenschaltung (U_1, U_2) ablesen.

5.2.3. Grafische Parallelschaltung

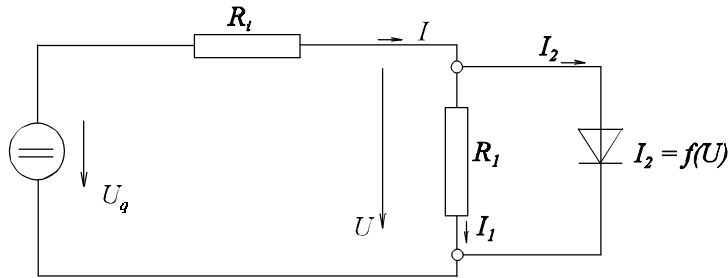
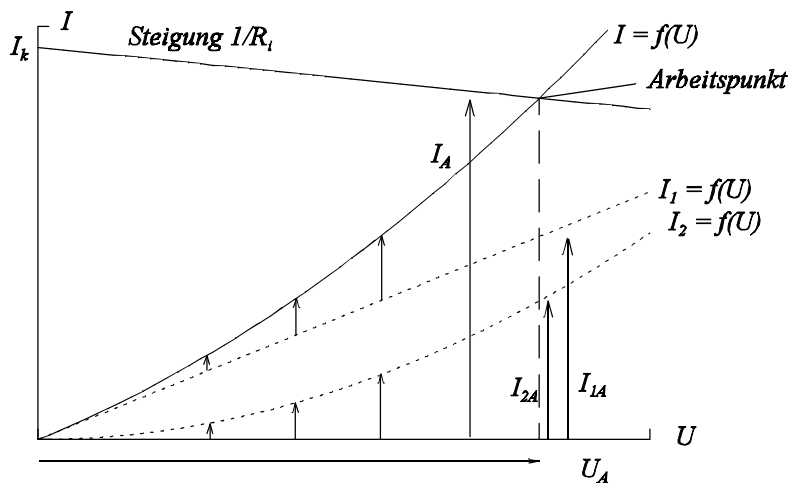


Bild EG523A



$$I_k = \frac{U_q}{R_i}$$

Bild EG523B: Grafische Lösung der Anordnung nach Bild EG523A

Die grafische Lösung der Anordnung nach Bild EG523A ist in Bild EG523B aufgezeigt. Folgende Schritte müssen ausgeführt werden:

- A] Die beiden Kennlinie des Widerstandes $I_1 = f_1(U) = U/R_l$ und der Diode $I_2 = f_2(U)$ sind gegeben. In Bild EG523B sind diese gestrichelt dargestellt.
- B] Das Ziel wiederum ist, eine gemeinsame Kennlinie zu konstruieren. In einer Parallelschaltung ist die Spannung die gemeinsame Größe und die Ströme müssen addiert werden. Dieses ist wiederum grafisch auszuführen. Bei gleichem Spannungen (senkrechte Pfeile) werden die beiden Ströme I_1 und I_2 in I-Richtung addiert. Mathematische Erklärung:

gegeben: $I_1 = f_1(U) = U/R_l$ $I_2 = f_2(U)$

gesucht: $I = f(U)$

Umkehrfunktion: $I_1 = I_1 + I_2 = f_1(U) + f_2(U)$ *)

*) Diese Addition der beiden Kennlinien in I-Richtung ist in Bild EG523B dargestellt.

- C] Mit der Gesamtkennlinie $I = f(U)$ kann der Arbeitspunkt wie in Abschnitt 5.2.1 bestimmt werden. Die Arbeitspunktgrößen lassen sich aus Bild EG523B ablesen.
- D] Zusätzlich zu Abschnitt 5.2.1 lassen sich aus Bild EG523B auch die Einzelströme der Parallelschaltung (I_1 , I_2) ablesen.

5.2.4. Polynom-Annäherung

Nichtlineare Kennlinien sind meist meßtechnisch aufgenommen oder ergeben sich aus komplizierten technischen Berechnungen.

Beispiele:

Messen: $I = f(U)$ (mehrere Meßpunkte)
 Berechnung: $I = I_R \cdot [\exp(u/u_r) - 1]$

Sowohl mit Meßpunkten als auch mit analytischer Kennlinie läßt sich schlecht analytisch rechnen. Ausweg: Die Kennlinie wird abschnittsweise durch ein Polynom ersetzt:

$$I = a_0 + a_1 U + a_2 U^2 + a_3 U^3 + \dots$$

Beispiel:

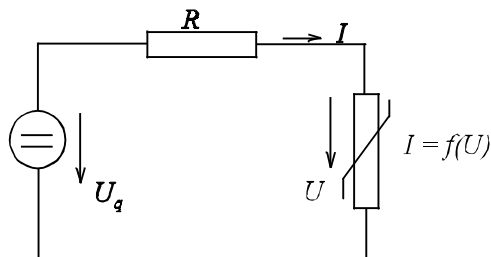


Bild EG524A

gegeben:

- Anordnung nach Bild EG524A
- U_q
- R
- drei Punkt der Kennlinie: I_1, U_1 I_2, U_2 I_3, U_3

gesucht: U, I

Lösung: Durch obere drei Punkte läßt sich eine Parabel 2. Grades legen:

$$I = a_0 + a_1 U + a_2 U^2 \quad (A)$$

Die Koeffizienten a_0, a_1 und a_3 lassen sich mit Hilfe oberer drei Punkt bestimmen, siehe Mathematik.

Ein Maschenumlauf nach Bild EG524A ergibt:

$$U_q = I \cdot R + U \quad (B)$$

Der Strom I in (B) wird durch (A) ersetzt:

$$U_q = a_0 \cdot R + a_1 \cdot R \cdot U + a_2 \cdot R \cdot U^2 + U \quad (C)$$

Die quadratische Gleichung (C) in U wird umgeformt und gelöst:

$$U^2 + \frac{a_1 \cdot R + 1}{a_2 \cdot R} \cdot U + \frac{a_0 \cdot R - U_q}{a_2 \cdot R} = 0$$

$$U = -\frac{a_1 \cdot R + 1}{2a_2 \cdot R} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1 \cdot R + 1}{2a_2 \cdot R}\right)^2 + \frac{U_q - a_0 \cdot R}{a_2 \cdot R}}$$

Anmerkungen

- Polynomannäherung gilt nur für einen gewissen Bereich.
- In der oberen Gleichung ergeben sich zwei Lösungen $\pm \sqrt{}$. Eine Lösung ist meist nicht relevant, weil diese außerhalb des anzupassenden Bereiches liegt.
- Eine Polynomannäherung höherer Ordnung ist auch möglich. Die Lösung wird dann numerisch bestimmt. Achtung: Nur die Lösung im Bereich der Anpassung verwenden.

5.2.5. Linearisierung im Arbeitspunkt

In den Abschnitten 5.2.1 bis 5.2.4 wurden Methoden zur Bestimmung der Arbeitspunkte nichtlinearer Gleichstromkreise vorgestellt. In diesem Abschnitt soll eine Methode vorgestellt werden, wo kleine Abweichungen von den ermittelten Arbeitspunkten betrachtet werden. Beispiel einer Anwendung: Einer Gleichspannung ist eine kleine Wechselspannung überlagert.

Die Herleitung soll anhand eines einfachen Beispiels nach Bild EG525A erfolgen.

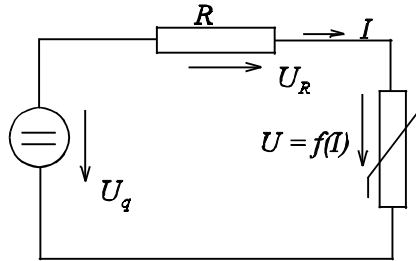
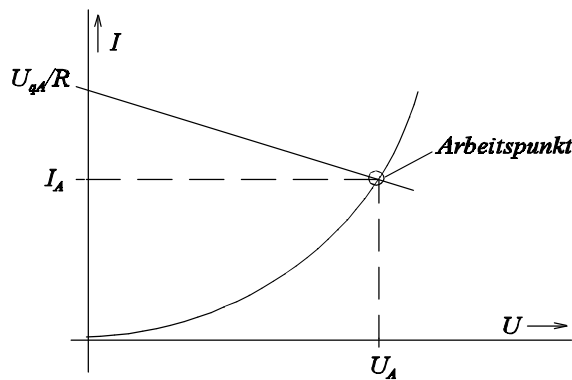


Bild EG525A

Die grafische Lösung des oberen Kreises wurde in Abschnitt 5.2.1 erläutert, siehe Bild EG525B.



Aus Bild EG525B ergeben sich die Größen im Arbeitspunkt:

- U_{qA} - Spannung der Quelle, mit dem die Größen des Arbeitspunkts bestimmt werden
- U_A - Spannung am nichtlinearen Widerstand im Arbeitspunkt
- I_A - Strom im Arbeitspunkt
- U_{RA} - Spannung am Innenwiderstand der Quelle im Arbeitspunkt

Bild EG525B

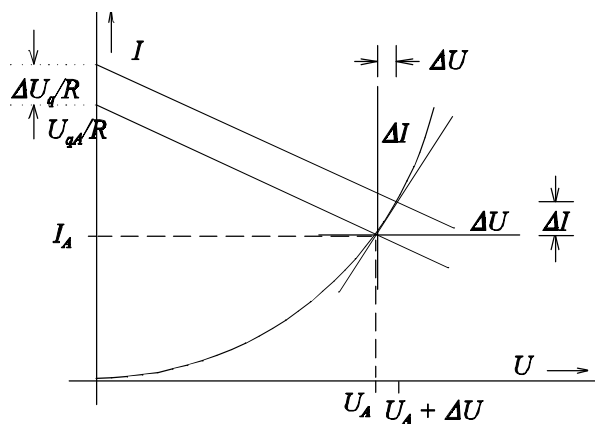
Aus Bild EG525A ergibt ein Maschenumlauf:

$$U_q = U_R + U \quad (A)$$

Für den Arbeitspunkt wird speziell ermittelt:

$$U_{qA} = U_{RA} + U_A \quad (B)$$

Erhöht sich die Spannung der Quelle um ΔU_q , müßte die Kennlinie der Quelle in Bild EG525B parallel verschoben werden ($U_q = U_{qA} + \Delta U_q$). Das Ergebnis ist in Bild EG525C dargestellt.



Nach Bild EG525C ergeben sich die Abweichungen vom Arbeitspunkt:

- ΔI - Abweichung Strom
- ΔU - Abweichung Spannung am nichtlinearen Widerstand
- ΔU_R - Abweichung Spannung am Innenwiderstand der Quelle
- ΔU_q - Abweichung der Quellspeisung

Bild EG525C

Die Gesamtgrößen ergeben sich aus Arbeitspunktgrößen plus Abweichung vom Arbeitspunkt:

$$I = I_A + \Delta I \quad (C)$$

$$U = U_A + \Delta U \quad (D)$$

$$U_R = U_{RA} + \Delta U_R \quad (E)$$

$$U_q = U_{qA} + \Delta U_q \quad (F)$$

Für die Abweichungen vom Arbeitspunkt läßt sich ein neues Koordinatensystem (ΔI , ΔU) einführen, siehe Bild EG525C.

Nähert man die Kennlinie des nichtlinearen Widerstandes im Arbeitspunkt durch eine Gerade an (siehe Bild EG525C), kann man angeben

$$\frac{\Delta U}{\Delta I} = r = \frac{1}{\frac{\Delta I}{\Delta U}} = \frac{1}{g} \quad \Delta U = r^* \Delta I$$

Die Größen r und g werden differentieller Widerstand bzw. differentieller Leitwert genannt.

$$r = \left. \frac{dU}{dI} \right|_{I=I_A} \quad g = \left. \frac{dI}{dU} \right|_{U=U_A} \quad \Delta U = r^* \Delta I \quad (G)$$

Eingesetzen von (F), (E) und (D) in (A) ergibt

$$U_q + \Delta U_q = U_{RA} + \Delta U_R + U_A + \Delta U \quad (H)$$

$$U_{qA} = U_{RA} + U_A \quad (B)$$

Aus der Subtraktion von (H) und (B) folgt eine Gleichung für die Abweichung vom Arbeitspunkt:

$$\Delta U_q = \Delta U_R + \Delta U \quad (I)$$

Mit $\Delta U_R = R^* \Delta I$

$$\Delta U = r^* \Delta I$$

kann (I) angegeben werden als: $\Delta U_q = R^* \Delta I + r^* \Delta I = (R + r)^* \Delta I \quad (J)$

Gleichung (J) ergibt eine lineare Ersatzschaltung für die Abweichungen vom Arbeitspunkt, siehe Bild EG525D.

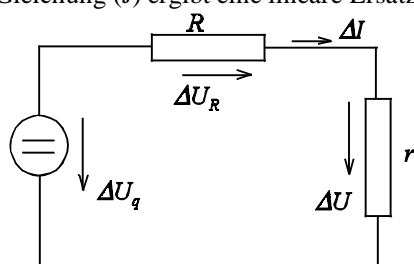


Bild EG525D

Fazit: Bei nichtlinearen Schaltungen kann bei kleinen Abweichungen vom Arbeitspunkt mit differentiellen Widerständen/Leitwerten für die Abweichungen gerechnet werden.

Schema Linearisierung:

- A] Arbeitspunkt bestimmen (meist grafisch, oder auch analytisch)
- B] Durch Linearisieren Steigung r oder Steigung g bestimmen
- C] Mit Leitwert g oder Widerstand r für das nichtlineare Element können deren Abweichungen von Arbeitspunkt berechnet werden. Lineare Widerstände bleiben erhalten.

5.2.6. Lineare Ersatzschaltung

Prinzip: Die nichtlineare Kennlinie wird abschnittsweise durch Geraden angenähert. Jede Gerade läßt sich durch Quelle mit Innenwiderstand darstellen.

Beispiel: Herleitung des ESBs einer Zenerdiode

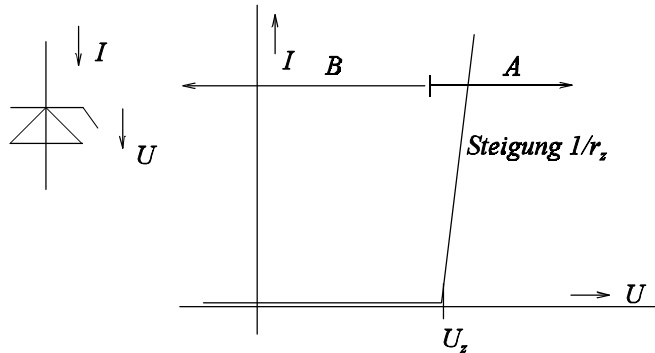


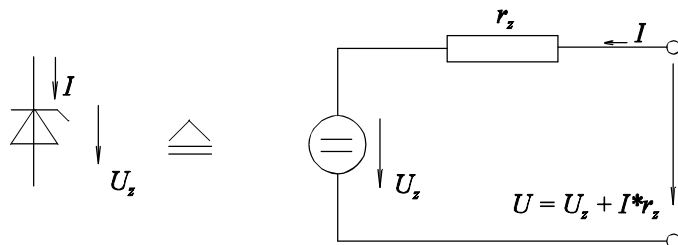
Bild EG526A

Die obere Kennlinie einer Zenerdiode läßt sich durch zwei Bereiche angeben. Für den Bereich A gilt nach Bild EG526A:

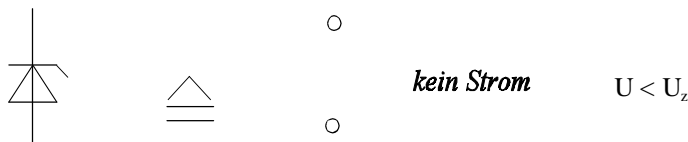
$$I = \frac{U - U_z}{r_z}$$

$$U = I \cdot r_z + U_z$$

Aus der oberen Formel läßt sich mit Hilfe eines Maschenumlaufs das ESB EG526B für den Bereich A angeben.

Bild EG526B: ESB für $U > U_z$ bzw. $I > 0$

Falls bei der Berechnung mit dem ESB EG526B negative Ströme (gleich $U < U_z$) auftreten, ist der Bereich A verlassen. Es muß für den Bereich B ein ESB gefunden werden. Da kein Strom fließt (bei im Bereich B beliebiger Spannung) ist ein unendlicher Widerstand vorhanden, dieses bedeutet offene Klemmen.

Bild EG526C: ESB für $U < U_z$

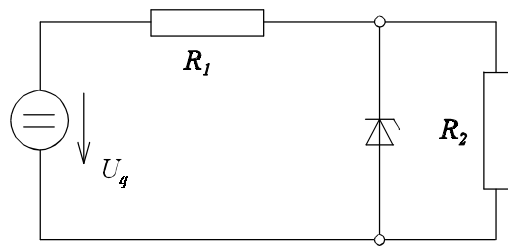
Beispiel:

Bild EG526D

Zur Berechnung der oberen Schaltung (Bild EG526D) wird die Zenerdiode durch das ESB EG526B ersetzt. Das Ergebnis ist in Bild EG526E zu sehen.

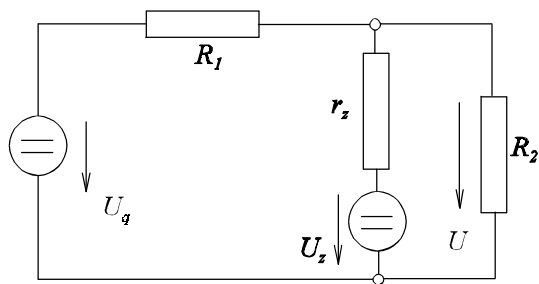


Bild EG526E

Die obere Schaltung kann mit den linearen Methoden der Kapitel 2 und 3 berechnet werden. Achtung: Falls die Spannung U kleiner U_z wird ist die obere Schaltung nicht gültig. Der Zweig der Zenerdiode muß dann herausgenommen werden.

5.3. Thermoelektrische Erscheinungen

5.3.1. Temperaturabhängigkeit des Widerstandes

5.3.1.1. Metalle und Halbleiter

Wiederholung:

$$\begin{aligned}\rho(T) &= \frac{1}{\kappa(T)} \\ R &= \rho(T) \cdot \frac{l}{A} = \frac{l}{\kappa(T) \cdot A} \\ \vec{J} &= \kappa(T) \cdot \vec{E}\end{aligned}$$

Zur Diskussion der Temperaturabhängigkeit des Widerstandes reicht es aus, die Abhängigkeit des spezifischen Widerstandes (bzw. der spezifischen Leitfähigkeit) zu behandeln, weil sich die Abmessungen nur geringfügig ändern.

Wiederholung aus Kap. 5.1.3:

$$\begin{aligned}\kappa &= q \cdot n \cdot b \\ \kappa(T) &= q \cdot n(T) \cdot b(T)\end{aligned}$$

Der elektrische Widerstand ist somit abhängig von:

- $n(T)$ - Anzahl der freien Ladungsträger
- $b(T)$ - Beweglichkeit der freien Ladungsträger

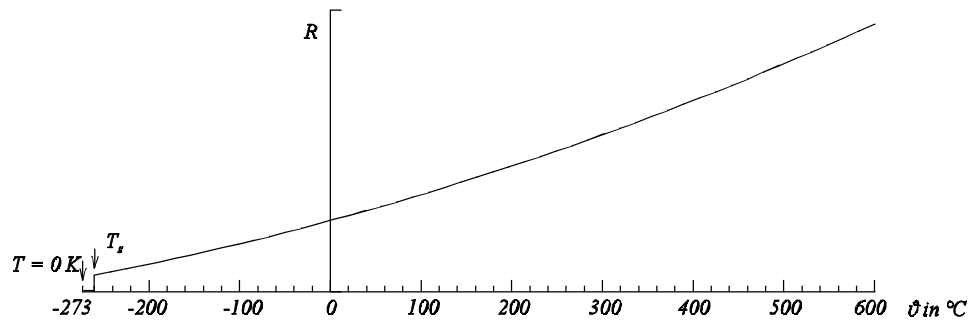
Temperaturabhängigkeit des Widerstandes von Metallen:

$$\begin{aligned}n &= \text{const} \\ n &\neq f(T) \\ b &= f(T)\end{aligned}$$

Bei Metallen stehen unabhängig von der Temperatur alle Ladungsträger des Valenzbandes zur Verfügung. Die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit ist somit nur durch die Beweglichkeit der Valenz-Elektronen bedingt. Die Beweglichkeit wird von den Gitterschwingungen der Atomkerne beeinflusst. Höhere Temperaturen und somit thermische Energie bewirken größere Gitterschwingungen. Vermehrte Gitterschwingungen bewirken eine höhere Anzahl von Stößen und schränken somit die Beweglichkeit ein. Die Leitfähigkeit wird geringer und der Widerstand steigt. Bei der absoluten Temperatur $T = 0$ sind keine thermische Energien und keine Gitterschwingungen vorhanden. Somit steht den Elektronen kein Widerstand mehr entgegen, der Widerstand wird Null, der Leitwert, die Beweglichkeit, die spezifische Leitfähigkeit werden unendlich. Hier spricht man dann von Supraleitung, die auch noch bei geringen Temperaturen (absolut in K) vorhanden bleibt, siehe auch Bild EG5311A. Das Temperaturverhalten des Widerstandes von Metallen ist in Bild EG5311A aufgezeigt. Wird die Temperatur verringert, verringert sich der Wert des Widerstandes sprunghaft von einem endlichem Wert auf Null. Man spricht von der sogenannten Sprungtemperatur T_s , bei der die Supraleitung einsetzt.

T_s - Sprungtemperaturen verschiedener Metalle ($T/K = \vartheta/^{\circ}\text{C} + 273$)

Al	1.14 K
Zinn	3.69 K
Hg	4.17 K
Blei	7.27 K
Niob	9.20 K
Niobnitrid	20.00 K

Bild EG5311A: Widerstand von Metallen als Funktion der Temperatur, T_s -Sprungtemperatur**Zusammenfassung der Temperaturabhängigkeit von Metallen:**

- A] $T \rightarrow 0$ \Rightarrow Supraleiter
 $\Rightarrow R, \rho = 0$
 $\Rightarrow G, b, \kappa \rightarrow \infty$
- B] Mit der Temperatur steigt auch der Widerstand.

Die Funktion des Widerstandes nach Bild EG5311A ist analytisch schwer zu beschreiben. Eine Annäherung des Widerstandes, bzw des spezifischen Widerstandes, ist mit Hilfe von Geraden und Parabeln 2. Ordnung üblich:

$$R(\vartheta) = R_{20} \cdot [1 + \alpha_{20}(\vartheta - 20^{\circ}\text{C})]$$

Gerade

$$R(\vartheta) = R_{20} \cdot [1 + \alpha_{20}(\vartheta - 20^{\circ}\text{C}) + \beta_{20}(\vartheta - 20^{\circ}\text{C})^2]$$

quadratische Parabel

Die Daten α_{20} und β_{20} von verschiedenen Materialien sind schon in Abschnitt 2.2.3 angegeben worden. Welche Gleichung ist zu verwenden? Antwort: Dieses ist vom Temperaturbereich abhängig. In Bild EG5311B ist der spezifische Widerstand von Kupfer in Abhängigkeit der Temperatur dargestellt. Im Temperaturbereich zwischen -100°C und $+150^{\circ}\text{C}$ treten keine großen Unterschiede zwischen Gerade und quadratischer Form auf. In diesem Bereich kann die Geradenfunktion benutzt werden.

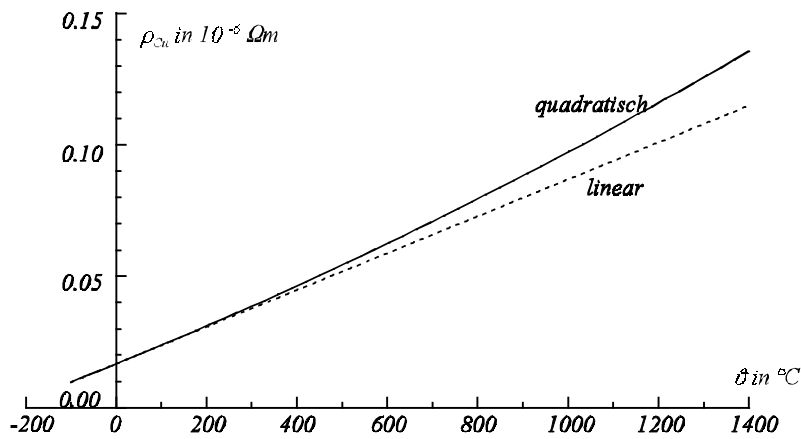


Bild EG5311B: Spezifischer Widerstand von Kupfer

Die Bedeutung der Geradenfunktion zeigt Bild EG5311C. Der Wert R_{20} gibt den Widerstand bei $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ an:

$$R_{20} = R(\vartheta) \Big|_{\vartheta=20^\circ\text{C}}$$

Der Temperaturbeiwert α_{20} ist mit der Steigung bei $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ verknüpft. Temperaturbeiwert α :

$$R(\vartheta) = R_{20} * [1 + \alpha(\vartheta - \vartheta_A)]$$

$$\frac{R(\vartheta)}{R_{20}} - 1 = \alpha(\vartheta - \vartheta_A)$$

$$\frac{dR(\vartheta)}{d\vartheta} \frac{1}{R_{20}} = \alpha$$

$$\alpha_{20} = \frac{1}{R_{20}} * \left. \frac{dR(\vartheta)}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=20^\circ\text{C}} = \left. \frac{\frac{dR(\vartheta)}{d\vartheta}}{R(\vartheta)} \right|_{\vartheta=20^\circ\text{C}}$$

Die Geradenfunktion des Widerstandes stellt somit auch eine Linearisierung im Arbeitspunkt ($\vartheta = 20^\circ\text{C}$) dar, vergleiche Abschnitt 5.2.5 (Linearisierung der U-I-Kennlinie).

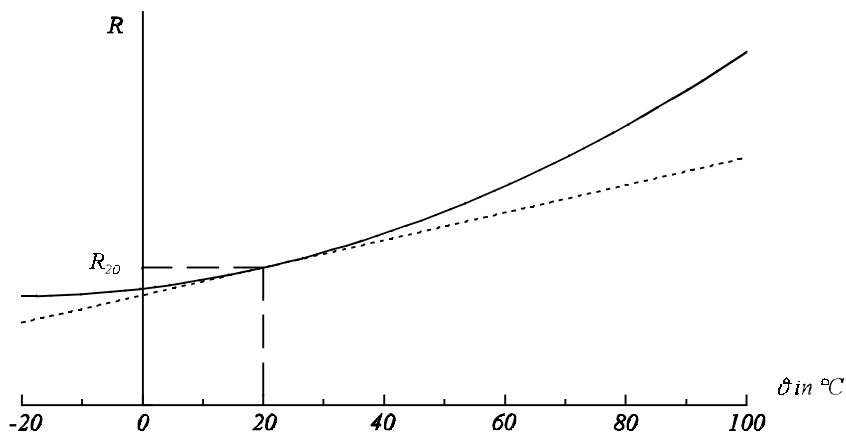


Bild EG5311C: Linearisierung des Widerstandes

Temperaturabhängigkeit des Widerstandes von Halbleitern

Zur Erinnerung: $\kappa = q \cdot n(T) \cdot b(T)$

Die Anzahl der zur Verfügung stehenden Ladungsträger im Halbleiter ist nach einer Näherungsformel (siehe Abschnitt 5.1.4.1) stark von der Temperatur abhängig:

$$n = A \cdot e^{-\frac{\Delta W}{kT}} \quad kT_0 = 0.026 \text{ eV}$$

Aus der oberen Gleichung läßt sich ablesen:

$T \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad n \rightarrow 0$, die Anzahl der Ladungsträger geht gegen Null

T wird größer \Rightarrow erheblich mehr Ladungsträger stehen zur Verfügung (e-Funktion).

Die Beweglichkeit der Ladungsträger in Halbleitern ist schwach von der Temperatur abhängig:

$$b(T) \approx C \cdot T^{-(1.6 \dots 2.3)}$$

$$b(T) \approx C \cdot \frac{1}{T^2}$$

Da die e-Funktion erheblich größeren Einfluß hat als die Potenzfunktion, überwiegt beim Einfluß auf die Leitfähigkeit beim Halbleiter die Anzahl der Ladungsträger im Leitungsband. Damit weisen Halbleiter folgende Eigenschaften auf:

$T = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Halbleiter ist Isolator

$T \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad$ Halbleiter ist besserer Leiter

Mit der zunehmender Temperatur nimmt der Widerstand ab ($\alpha < 0$).

Mit der zunehmender Temperatur nimmt der Leitwert zu.

5.3.1.2. NTC und PTC Widerstände

α - Temperaturleitwert

α - Steigung der normierten Widerstandsänderung in Abhängigkeit der Temperatur

Thermistoren: Stark temperaturabhängige Widerstände

NTC - Negativer Temperatur Coeffizient $\alpha < 0$

PTC - Positiver Temperatur Koeffizient $\alpha > 0$

NTC - Heißleiter $\vartheta = 20^\circ\text{C}$, R groß ϑ groß, R klein

PTC - Kaltleiter $\vartheta = 20^\circ\text{C}$, R klein ϑ groß, R groß

Anwendung PTC:**Überstrombegrenzung:**

Tritt ein großer Strom auf, erwärmt sich der PTC. Dadurch erhöht sich der Widerstand. Das wiederum verringert den Strom.

Ölstandsfühler:

In Luft wird der PTC wenig gekühlt, aufgrund der Eigenerwärmung entsteht ein großer Widerstand. Wird der PTC von Öl umgeben, entsteht eine gute Kühlung, der PTC wird niederohmig.

Anwendung NTC:**Einschaltstrombegrenzung:**

Bei Reihenschaltung mit einer Lampe ($\alpha > 0$) und eines NTCs ($\alpha < 0$) fällt am Anfang die Spannung am NTC ab. Der NTC erwärmt sich, der NTC Widerstand wird geringer, der Strom wird größer. Die Lampe (PTC) erwärmt sich. Der Widerstand der Lampe wird größer. Zum Schluß fällt der weitaus größte Teil der Spannung an der Lampe ab.

Temperaturmessung:

$R = f(\vartheta)$, starke Temperaturabhängigkeit.

Temperatur-Kompensation:

Die Widerstände (A: $\alpha > 0$ B: $\alpha < 0$) kompensieren den Temperatur Einfluß (siehe Abschnitt 5.3.1.3).

NTC-Material: Halbleiter, Titanoxid

Widerstand und Temperaturbeiwert eines NTCs:

zur Erinnerung HL: $n = A * e^{-\frac{\Delta W}{kT}}$

$$R = a * e^{\frac{b}{T}}$$

$$R_A = a * e^{\frac{b}{T_A}}$$

$$\frac{R}{R_A} = \frac{e^{\frac{b}{T}}}{e^{\frac{b}{T_A}}} = \exp \left[\frac{b}{T} - \frac{b}{T_A} \right] = \exp \left[b \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_A} \right) \right]$$

$$R(\vartheta) = R_A * \exp \left[b \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_A} \right) \right]$$

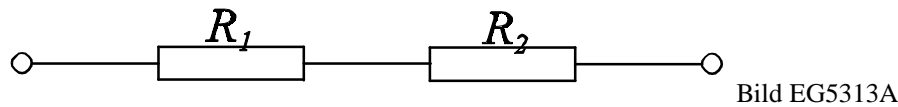
$$\alpha_A = \frac{d \frac{R}{R_A}}{dT} \bigg|_{T=T_A} = \frac{d}{dT} \left\{ \exp \left[b \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_A} \right) \right] \right\} \bigg|_{T=T_A}$$

$$\alpha_A = \exp \left[b \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_A} \right) \right] * \left(-\frac{b}{T^2} \right) \bigg|_{T=T_A}$$

$$\alpha_A = -\frac{b}{T_A^2}$$

5.3.1.3. Temperaturkompensation

Die Forderung der Temperaturkompensation lautet: In einem gewissen Temperaturbereich soll der Widerstand der Gesamtschaltung nach Bild EG5313A kaum von der Temperatur abhängig sein.



$$R_1 = f(\vartheta) \\ \alpha_1 > 0$$

$$R_2 = f(\vartheta) \\ \alpha_2 < 0$$

gesucht: $R \neq f(\vartheta)$

$$R = R_1 + R_2$$

- | | | |
|---------------|---|---|
| ϑ_A | - | Temperatur im Arbeitspunkt, an dem kompensiert werden soll |
| R_{1A} | - | Wert des Widerstandes 1 bei der Temperatur ϑ_A |
| R_{2A} | - | Wert des Widerstandes 2 bei der Temperatur ϑ_A |
| α_1 | - | Temperaturbeiwert des Widerstandes 1 bei der Temperatur ϑ_A |
| α_2 | - | Temperaturbeiwert des Widerstandes 2 bei der Temperatur ϑ_A |

$$R_1 = R_{1A}[1 + \alpha_1(\vartheta - \vartheta_0)]$$

$$R_2 = R_{2A}[1 + \alpha_2(\vartheta - \vartheta_0)]$$

$$R = R_1 + R_2$$

$$R = R_{1A} + R_{2A} + [R_{1A} \cdot \alpha_1 + R_{2A} \cdot \alpha_2][\vartheta - \vartheta_0]$$

Der obere Widerstand weist kein Temperatureinfluß auf, wenn der temperaturabhängige Term Null wird:

$$R_{10} \cdot \alpha_1 + R_{20} \cdot \alpha_2 = 0$$

Die Kompensation ist nur möglich, wenn ein Widerstand einen positiven und der andere einen negativen Temperaturbeiwert aufweist.

Achtung: Wegen Nichtlinearitäten (hier wurde linearisiert) ist der Bereich der Kompensation zu überprüfen.

Das Ergebnis einer Kompensation mit einem stark nichtlinearem NTC (Aufgabe 5.3.1/5.3.2) ist in den Bildern EG5313B und EG5313C dargestellt. Die Linearisierung für den NTC ist nach Bild EG5313B nur in einem gewissen Temperaturbereich gültig. Das Kompensationsergebnis in Bild EG5313C zeigt für 20 °C eine waagerechte Tangente.

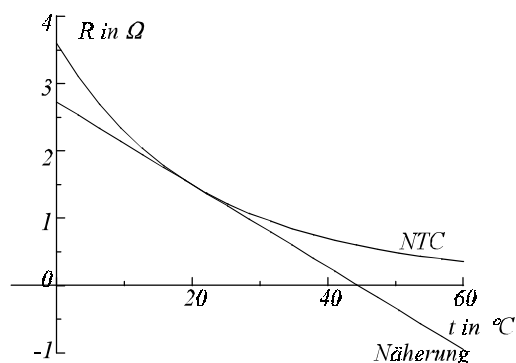


Bild EG5313B

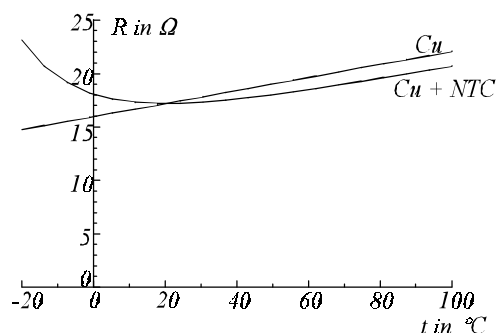


Bild EG5313C

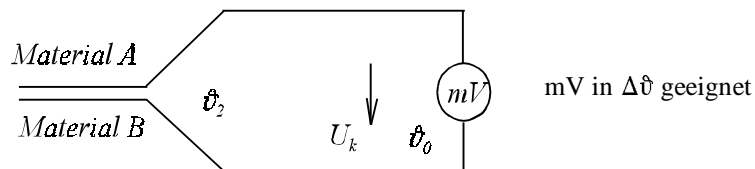
Anwendung: Temperaturmessung mit Thermoelement

Bild EG5321D

$$U = f[\text{Material}, (\vartheta_2 - \vartheta_0)]$$

$$U_{th} = (\epsilon_2 - \epsilon_1) \Delta T = (\epsilon_2 - \epsilon_1) \Delta \vartheta = (\epsilon_2 - \epsilon_1) (\vartheta_2 - \vartheta_0)$$

ϵ - elektrothermisches Äquivalent

ϵ - materialabhängig \Rightarrow Elektrothermische Spannungsreihe

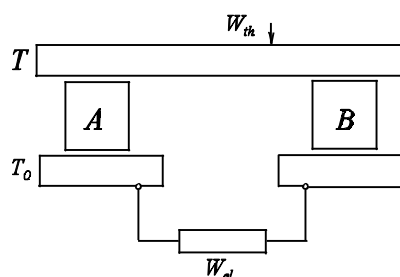
Material		$\epsilon/\mu\text{V/K}$
Antimon	Sb	35
Eisen	Fe	16
Zink	Zn	3
Kupfer	Cu	2.8
Silber	Ag	2.7
Blei	Pb	0
Aluminium	Al	-0.5
Platin	Pt	-3.1
Nickel	Ni	-19
Wismut	Bi	-70
Silizium	Si	450
Konstantan		-37

Angewandte Thermoelemente:

Cu - Konstantan 40 $\mu\text{V/K}$ bis 400°C

NiCr - Konstantan 50 $\mu\text{V/K}$ bis 700°C

Pt - PtRh 8 $\mu\text{V/K}$ bis 1600°C

Theoretischer Thermogenerator

$$\eta < 10 \%$$

Die Energie ist klein, weil U klein ist.
Material A, Material B

Bild EG5321E

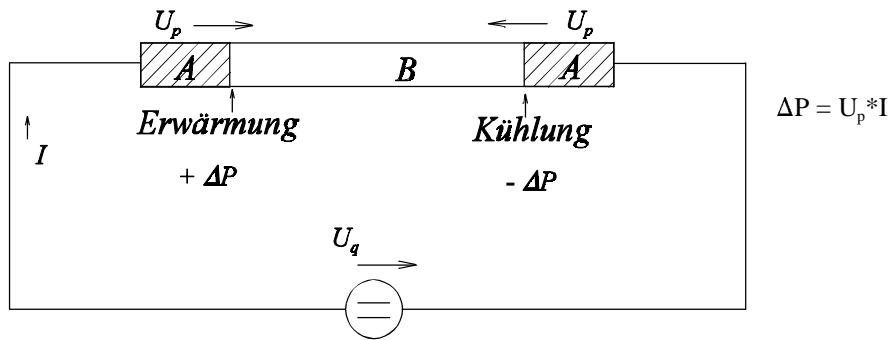
5.3.2.2. Peltier-Effekt

Bild EG5322A

 U_p - Peltierspannung

$$U_p \approx 10^{-2} \dots 10^{-3} \text{ V}$$

Spannung U_p ergibt sich wie beim Thermoelement aus der unterschiedlichen Austrittsarbeit der Elektronen. In Bild EG5322A ist der Strom einmal in Richtung U_p gerichtet: Dieses ergibt eine Erwärmung. Ist der Strom entgegengesetzt zu U_p gerichtet, ergibt sich eine Kühlung.

$$U_p = (\epsilon_2 - \epsilon_1)T$$

ϵ - Wert der elektrothermische Spannungsreihen

T - Kelvin-Temperatur (absolute Temperatur)

5.4. Elektrochemische Vorgänge

5.4.1. Elektrolyt

Elektrolyt: elektrisch leitende Flüssigkeit

Was ist Wasser, ein guter oder ein schlechter Leiter? Reines Wasser ist ein schlechter Leiter. Leitungswasser ist besser elektrisch leitfähig, weil es Zusätze (Salze) enthält.

Es gibt drei Arten von Zusätzen, die Wasser elektrisch leitfähig machen:

- Säuren
- Lauge
- Salze

Allen gemeinsam ist, daß sich alle drei Zusätze im Wasser lösen. Die Moleküle werden aufgetrennt und stehen als positive und negative Ladungsträger zur Verfügung, die den Strom leiten können.

positive Ladungsträger:	Kationen
negative Ladungsträger:	Anionen

Beispiel: Säure

Säure = H^+ -Ion + Säurerest

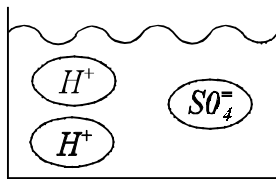


Bild EG541A: H_2SO_4 - Schwefelsäure

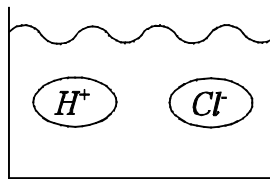
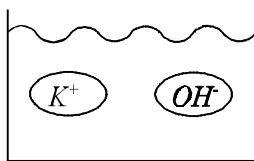


Bild EG541B: HCl - Salzsäure

Beispiel: Base, Lauge

Lauge = Base + H_2O



KOH - Kaliumhydroxyd

Bild EG541C

Beispiel: Salz

Salz = Metall + Säurerest

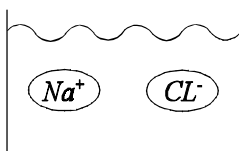


Bild EG541D: $NaCl$ Natriumchlorid (Kochsalz)

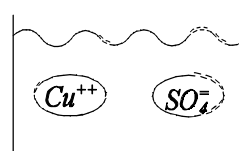


Bild EG541E: $CuSO_4$ Kupfersulfat

Stromleitung:

Bei Anlagen einer Feldstärke wandern die positiven Ladungsträger in Richtung der Feldstärke, die negativen entgegengesetzt zur Feldstärke.

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

5.4.2. Elektrolyse und Stromleitung

Stromleitung im Elektrolyten unter Einschluß der Vorgänge an den Elektroden

Beispiel: Säure H_2SO_4

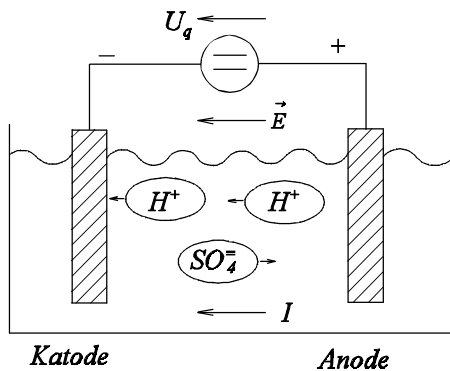


Bild EG542A

positive Teilchen H^+ Kationen wandern zur Kathode
negative Teilchen SO_4^{2-} Anionen wandern zur Anode



Elektrolyse: Unter Einfluß des elektrischen Stromes werden Stoffe zu den Elektroden transportiert. Dort entstehen abhängig vom Elektrolyten und vom Material der Elektroden elektrochemische Reaktionen.

Beispiel: Salz Cu SO_4 (Kupfersulfat)

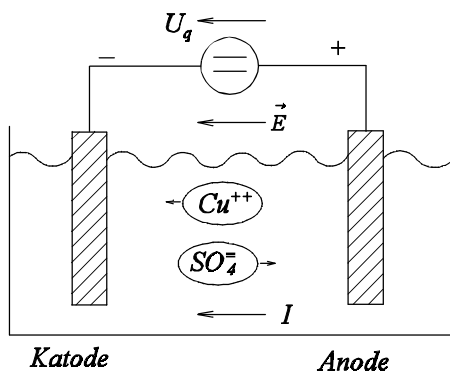


Bild EG542B



Anwendung:

- galvanisieren, Metallüberzug
- Herstellung reiner Stoffe (Metalle)
- H_2 und O_2 Gewinnung

Faraday'sche Gesetze

Das **erste Gesetz von Faraday** sagt aus, daß die bei der Elektrolyse transportierte Masse proportional der durch den Elektrolyten geflossenen Ladung ist:

transportierte Masse \sim Ladung

$$m \sim Q$$

$$m = c \cdot I \cdot t$$

1. Faraday'sches Gesetz

Die Proportionalitätskonstante c ist eine Eigenschaft der Materialien und wird "elektrochemisches Äquivalent" genannt.

Früher lautete die Definition des Amperes: 1 Ampere ist die Stromstärke die aus einer Silbernitrat-Lösung in 1 s 1.118 mg Silber ausscheidet.

c - Werte in mg/As			
ALu	0.094	Cu	0.33
Gold	0.68	Ag	1.12

Das **zweite Gesetz von Faraday** beschäftigt sich mit der Bestimmung des elektrochemischen Äquivalents. Ein Atom (oder Molekül) transportiert z Valenzelektronen.

z - Zahl der Valenzelektronen
 A_T - Atomgewicht (Molekülgewicht) in u
 $u = 1.66 \cdot 10^{-24} \text{ g}$ - atomare Masseneinheit

Die transportierte Ladung eines Atoms (oder Moleküls) ergibt sich aus Elementarladung q und Zahl der Valenzelektronen z :

$$Q = z \cdot q$$

Die transportierte Masse eines Atoms (oder Moleküls) läßt sich aus Atomgewicht (Molekülgewicht) A_T und atomarer Masseneinheit u berechnen:

$$m = A_T \cdot u$$

Einsetzen der oberen beiden Formeln in die Gleichung des ersten Faraday'schen Gesetzes ($m = c \cdot Q$) ergibt:

$$(A_T \cdot u) = c \cdot (z \cdot q)$$

$$c = \frac{A_T \cdot u}{z \cdot q}$$

$$c = \frac{A_T}{z} \cdot \frac{1.66 \cdot 10^{-24} \text{ g}}{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}}$$

$$c = \frac{A_T}{z} \cdot 1.04 \cdot 10^{-5} \frac{\text{g}}{\text{As}}$$

2. Faraday'sches Gesetz

5.4.3. Elektrochemische Spannungserzeugung

Bislang wurde eine Spannung außen angelegt und die Wirkung des Stromes diskutiert (Elektrolyse). In diesem Abschnitt sollen die Spannungseffekte an den Elektroden untersucht werden. Dazu wird der Versuch 5.1 beschrieben. Das Potential im elektrolytischen Trog bei Stromfluß nach Bild EG543A wird bestimmt. Das Ergebnis ist in Bild EG543B dargestellt.

Versuch 5.1:

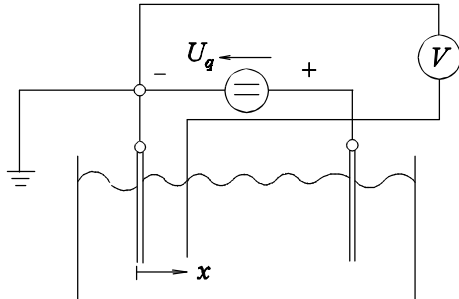


Bild EG543A: Versuch 5.1: Messung des Potentials im elektrolytischen Trog bei Gleichspannung

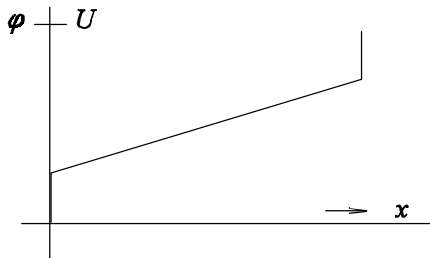


Bild EG543B: Ergebnis Versuch 5.1

Fazit: In der Mitte ist ein linearer Verlauf vorhanden. Dieser linearer Verlauf ist durch die Leitfähigkeit des Elektrolyten bedingt. An den Elektroden ist ein sprungförmiger Übergang vorhanden. Wie ist das zu erklären? Chemische Reaktionen und Polarisationen sind die Ursache.

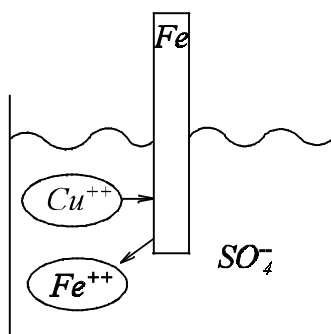
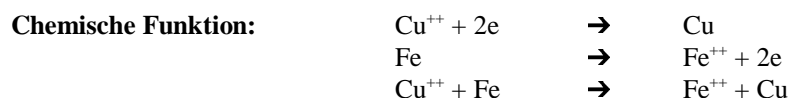
Versuch 5.2

Bild EG543C: Versuch 5.2, Versuchsanordnung

Versuchsdurchführung: Kupfersulfat (CuSO_4) wird in eine Wasser gelöst. Anschließend wird reines Eisenblech in die Kupfersulfatlösung getaucht.

V Versuchsergebnis: Kupfer schlägt sich auf das Eisenblech ab.

Physikalische Erklärung: Die positiven Cu^{++} -Ionen setzen sich auf dem Eisenblech als Cu ab. Woher kommen die zwei Elektronen pro Atom? Diese können nur aus dem Eisen stammen. Das Eisen geht als Kation Fe^{++} in die Lösung. Das Eisen (Fe) wird durch Kupfer (Cu) ersetzt.



Warum wird Eisen (Fe) durch Kupfer (Cu) ersetzt? Funktioniert der Vorgang auch umgekehrt, dazu wird der Versuch 5.3 beschrieben.

Versuch 5.3

Versuchsdurchführung: Platten aus verschiedenen Materialien werden in verschiedene Salzlösungen gehalten.

V Versuchsergebnis:

Salz	Material	Silber (Ag)	Kupfer (Cu)	Eisen (Fe)	Zink (Zn)
Silbernitrat	AgNO_3	-	Ag-Schicht	Ag-Schicht	Ag-Schicht
Kupfersulfat	CuSO_4	-	-	Cu-Schicht	Cu-Schicht
Eisensulfat	FeSO_4	-	-	-	Fe-Schicht
Zinksulfat	ZnSO_4	-	-	-	-

Kommentar: Es gibt eine gewisse Reihenfolge, manches wird ersetzt, manches nicht. Prinzip: Das edlere Metall setzt sich ab, das unedlere Metall geht in Lösung. **Das unedlere Metall hat die Tendenz eher in die Lösung zu gehen als das edlere Metall.**

Wie ist die chemische Spannungserzeugung zu erklären? Dazu soll der Versuch 5.4 beschrieben werden.

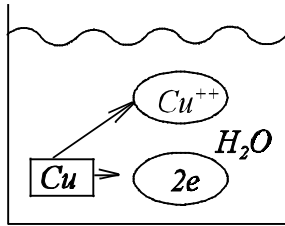
Versuch 5.4

Bild EG543D: Versuchsanordnung 5.4

Versuchsdurchführung: Kupfer (Cu) wird in Wasser gelegt. Es löst sich langsam auf.

V Versuchsergebnis: Kupfer (Cu) löst sich langsam auf.

Chemische Funktion: $\text{Cu}^{++} + 2e \rightarrow \text{Cu}$

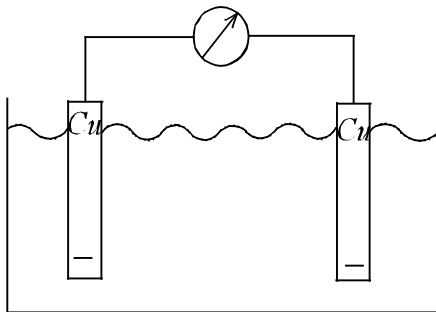
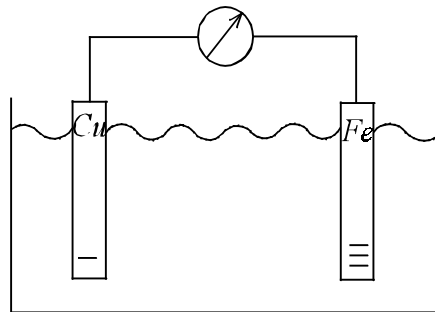
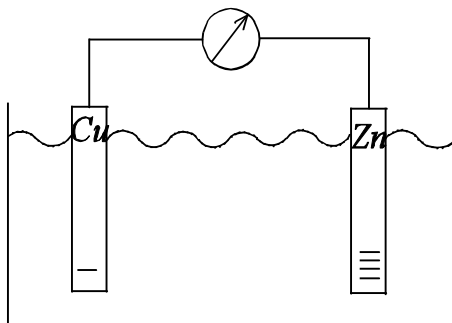
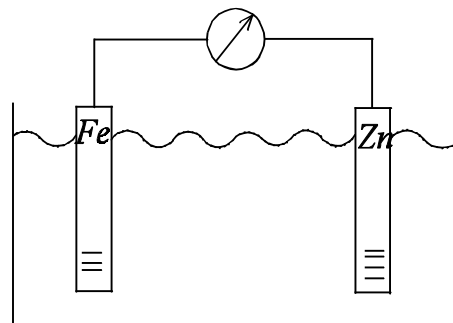
Fazit: Jedes Metall hat mehr oder weniger die Tendenz in Lösung zu gehen. Bei edlen Metallen ist die Tendenz gering, bei unedlen eher größer.

Zwei Fragen ergeben sich: Welches Metall ist edel und welches unedel. Bei Abgabe von Elektronen entstehen Aufladungen. Bedingen diese Aufladungen eine Spannung? Dazu wird der Versuch 5.5 beschrieben.

Versuch 5.5

Versuchsdurchführung: Platten aus Kupfer (Cu), Eisen (Fe) und Zink (Zn) werden in einem Elektrolyten getaucht und die Spannung gemessen.

Versuchsanordnung:

Bild EG543E: $U = 0 \text{ V}$ Bild EG543F: $U = 0.75 \text{ V}$ Bild EG543G: $U = 1.10 \text{ V}$ Bild EG543H: $U = 0.35 \text{ V}$

Physikalische Erklärung:

Jedes Metall hat unterschiedliche Neigung sich in Wasser aufzulösen. Wird ein Atom gelöst, werden die Valenzelektronen an die Metallelektrode abgegeben. Das Metall geht als Kation in Lösung. Die an die Metallelektrode abgegebenen Elektronen sind in den Bildern EG534E bis EG543H symbolisch mit “-” angedeutet. Dabei ist die unterschiedliche Lösbarkeit der Metalle durch die Anzahl der “-” Zeichen angedeutet. Unterschiedliche Elektronenkonzentrationen ergeben eine elektrische Spannung. Die Höhe der Spannung ergibt sich aus der Differenz der Anzahl der Elektronenabgabe. Es wird folgende Reihenfolge festgestellt:

edel	Cu	Fe	Zn	unedel
	1	3	4	
	-	---	----	

Elektrochemische Spannungsreihe

Material	Wertigkeit		U_{ch}/V
Lithium	1	Li	-3.04
Natrium	1	Na	-2.71
Aluminium	3	Al	-1.66
Zink	2	Zn	-0.76
Eisen	2	Fe	-0.45
Blei	2	Pb	-0.13
Eisen	3	Fe	-0.04
Wasserstoff		H ₂	0
Kupfer	2	Cu	0.34
Kupfer	1	Cu	0.52
Kohle			0.74
Quecksilber	2	Hg	0.80
Silber	1	Ag	0.80
Platin	2	Pt	1.18
Gold	3	Au	1.40
Gold	1	Au	1.69

$$U = U_{ch2} - U_{ch1}$$

Die Spannung eines chemischen Elementes ergibt sich aus der Differenz der Spannungswerte der elektrochemischen Spannungsreihe.

Problem: Beim einfachen chemischen Element tritt die obere theoretische Spannung nur am Anfang auf. Dazu wird der Versuch 5.6 beschrieben.

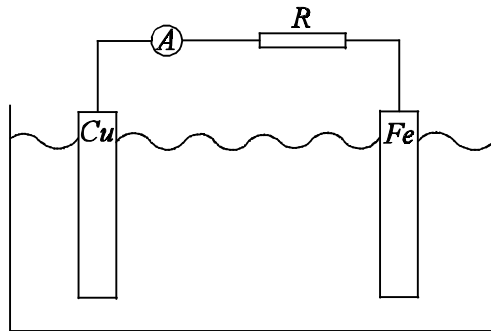
Versuch 5.6**Versuchsanordnung:**

Bild EG543I

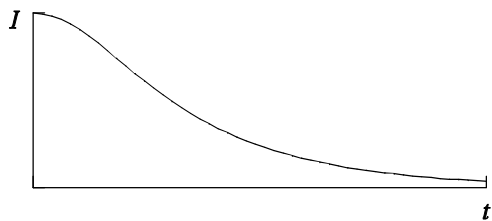
Versuchsergebnis:

Bild EG543J

Physikalische Ergebnis:

Abnahme des Stroms ist bedingt durch Effekte an den Elektroden und wird Polarisation genannt. Durch Elektrolyse bilden sich Gase:

1. Gase sind Nichtleiter
2. Gase befinden sich an anderen Stellen der elektrochemischen Spannungsreihe.

Der obere Effekt muß bei galvanischen Elementen (Batterien) unterbunden werden.

5.4.3.1. Galvanische Elemente

Auch: Batterie oder Primärzelle genannt. Nur ein Entladen der Batterie ist möglich. Aufladen ist unmöglich.

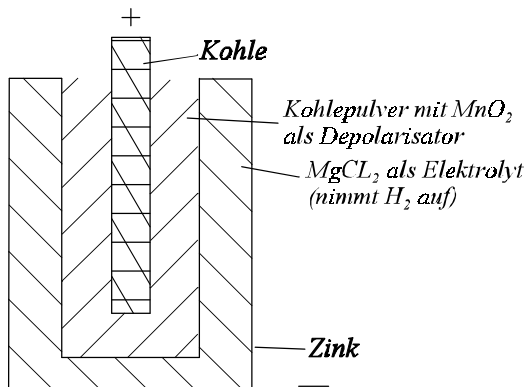
Kohle-Zink- Element

Bild EG5431a

$$R_i = f(t)$$

$$U = 1.5 \text{ V}$$

$$\vartheta < 0 \text{ schlecht}$$

$$\vartheta < -20 \text{ }^\circ\text{C} \text{ überhaupt kein Effekt}$$

$$100 \text{ mWh/cm}^3 \dots 200 \text{ mWh/cm}^3$$

Alkali-Mangan-Zelle

$$U = 1.5 \text{ V}$$

$$300 \text{ mWh/cm}^3 \text{ bis } -40 \text{ }^\circ\text{C}$$

Quecksilberoxid-Zelle

(Knopfzelle)

$$U = 1.35 \text{ V}$$

$$500 \text{ mWh/cm}^3 \quad -20 \text{ }^\circ\text{C} \dots 100 \text{ }^\circ\text{C}$$

Silberoxid-Zelle

$$300 \text{ mWh/cm}^3$$

Lithium-Zelle

$$U = 1.5 \dots 3 \text{ V}$$

$$1500 \text{ mWh/cm}^3, \text{ bis } -55 \text{ }^\circ\text{C}, \text{ sehr teuer}$$

Die einzelnen Zellen weisen unterschiedliche Entladekurven auf: $U = f(t)$

5.4.3.2. Akkumulator

zwei Richtungen: Laden und Entladen
auch Sammler und Sekundärzelle genannt

Bleiakku (Autobatterie)

Prinzip: Bleiplatte in Schwefelsäure

A) Laden:

Wird Blei (Pb) in Schwefelsäure getaucht, so bildet sich Bleisulfat (PbSO_4). Platten aus Blei mit Bleisulfat (PbSO_4)-Überzug bilden die Elektroden beim Laden

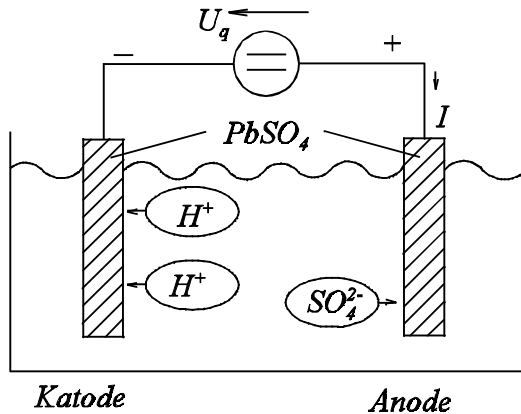


Bild EG5432A: Laden des Bleiakkus

Katode:



Erklärung: Die H_2^+ -Kationen wandern bei Anlegen einer Spannung zur Katode. Die Katode gibt zwei Elektronen ab. Es entsteht Blei (Pb) und Schwefelsäure (H_2SO_4). Die Schwefelsäure wird wieder im Wasser gelöst, so daß in der Bilanzgleichung die zwei H^+ -Ionen gekürzt werden können.

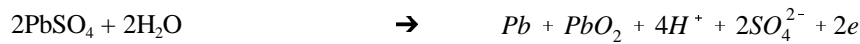
Anode:



Erklärung: Die SO_4^{2-} -Ionen wandern zur Anode. An der Anode entsteht Bleioxid (PbO_2). Das Blei (Pb) kann nur aus dem Bleisulfat (PbSO_4) stammen, so daß zwei SO_4 über sind. Diese verbinden sich zu zwei Schwefelsäure (H_2SO_4). In der Bilanz fehlen noch 2e , die das SO_4^{2-} abgibt. Die fehlenden 4H werden aus dem Wasser genommen. Die O-Bilanz stimmt somit auch. Schwefelsäure (H_2SO_4) löst sich wieder in Wasser. Somit kann in der Bilanzgleichung ein SO_4^{2-} auf der linken Seite gekürzt werden.

Gesamtbilanz beim Laden:

Die beiden Bilanz-Gleichungen von Anode und Katode werden addiert und zusammengefaßt:



Fazit: Beim Laden des Blei-Akkus wird Bleisulfat (PbSO_4) in Blei (Pb) und Bleioxid (PbO_2) umgewandelt. Bleioxid (PbO_2) ist edler als Blei (Pb) und damit die positive Elektrode. Außerdem verringert sich der Wasser (H_2O) Anteil und der Anteil der Schwefelsäure steigt.

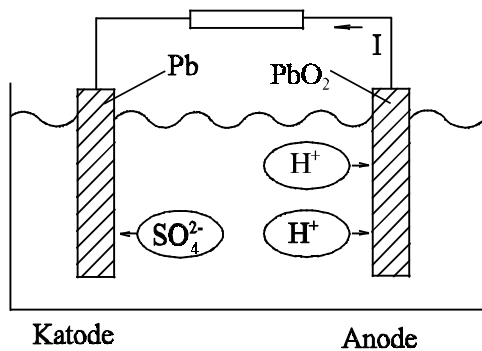
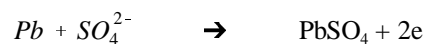
B) Entladen

Bild EG5432B

Frage: In welche Richtung bewegen sich die Ionen im Bad bei Anschließen eines Widerstandes. Zwei Begründungen sind möglich.

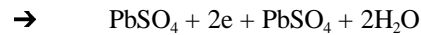
1. Der negative Pol der Spannungsquelle ist der unedlere Pol und der Pluspol ist der edlere Pol. Der Strom fließt also außerhalb der Quelle (Bades) vom Bleioxid (PbO_2) zum Blei (Pb).
2. Das Vorzeichen der Spannung bleibt beim Laden und beim Entladen gleich. Laden und Entladen haben verschiedene Energie-Richtungen. Da die Spannung gleich bleibt, kann die Energie nur durch den Strom umgekehrt werden. Die Richtung des Stromes ist somit beim Laden und Entladen unterschiedlich.

Da die Stromrichtung die Richtung der positiven Ladungsträger ist, kann die Ionenbewegung in Bild EG5432B eingezeichnet werden.

Katode:**Anode:**

Gesamtbilanz Entladen

Die beiden Bilanz-Gleichungen von Anode und Katode werden addiert und zusammengefaßt:



Fazit: Beim Entladen des Akkus wird Blei (Pb) und Bleioxid (PbO₂) in Beilsulfat (PbSO₄) umgewandelt. Außerdem wird Schwefelsäure (H₂SO₄) in Wasser (H₂O) umgewandelt. Die Säuredichte sinkt.

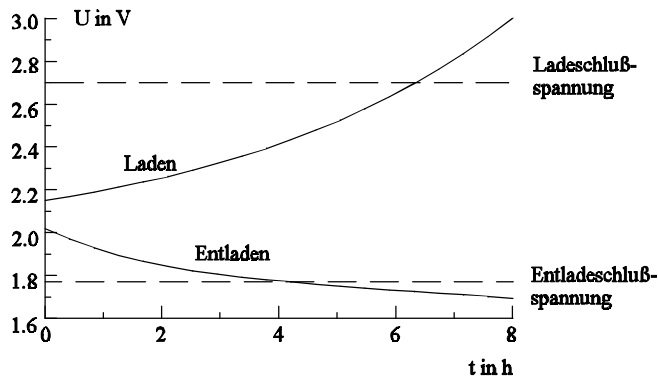


Bild EG5432C

Die Kapazität ist bei langsamer Entladung größer. Die Akkus nie entladen stehen lassen.

Laden: An der Katode entstehen geringe Mengen Wasserstoff (H₂), gefährlich. Wasser nachfüllen.

Daten Blei Akku

Leerlaufspannung	2.1 V	
Nennspannung	2.0 V	
Entladeschußspannung	1.75 V	
Ladeschußspannung	2.6 .. 2.75 V	
Säuredicht geladen	1.28 kg/dm ³	
Säuredicht entladen	1.184 kg/dm ³	
Energiedichte	8 Wh/kg	
Wirkungsgrad	$\eta_{\text{wh}} = 78 \%$	$\eta_{\text{Ah}} = 90 \%$

Weitere Akkus**Stahlakku:**

Elektroden	Ni, Cd, Fe	
Elektrolyt	KOH	
Nennspannung	1.2 V	
Entladungsschußspannung	1.0 V	
Ladungsschußspannung	1.8 V	
Energiedichte	25 .. 35 Wh/kg	
Wirkungsgrad	$\eta_{\text{wh}} = 50 .. 60 \%$	$\eta_{\text{Ah}} = 70 \%$
Eigenschaften	Robust, Dichtekontant, Knopfzelle möglich, Kapselbar	

Anhang

Aufgaben

Hinweis: Die ersten beiden Zahlen der Aufgabennummern beziehen sich auf das entsprechende Kapitel der Vorlesung. Die dritte Zahl ist eine reine Durchnummerierung. Beispiel: Nach Abschluß des Kap. 2.1 in der Vorlesung müßten alle Aufgaben bis einschließlich 2.1.x lösbar sein. Die Aufgaben mit dem Hinweis "ohne Unterlagen" sind nicht sehr aufwendig und dienen zur Wiederholung der Vorlesung. Diese sollten zu Hause noch vor der nächsten Vorlesung bearbeitet werden. Das Niveau dieser Aufgaben ist unter Klausurniveau.

Aufgabe 1.5.1

Zu berechnen ist:

$$\text{a)} \quad l = \frac{6 \text{ km} * 7 \text{ } \mu\text{m} * (4 \text{ mm})^2}{3 \text{ mm} * 8 \text{ cm}^2}$$

$$\text{b)} \quad P = \frac{(220 \text{ V})^2}{11 \text{ } \Omega}$$

$$\text{c)} \quad P = \frac{6000 \text{ J}}{5 \text{ min}}$$

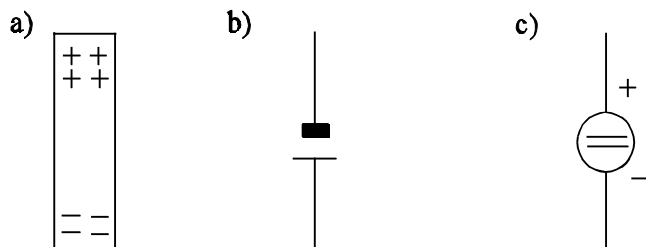
$$\text{d)} \quad I = \sqrt{\frac{5 \text{ kW}}{12.5 \text{ } \Omega}}$$

$$\text{e)} \quad P = 200 \text{ Nm} * 1200 \frac{1}{\text{min}}$$

Aufgabe 2.1.1 (ohne Unterlagen)

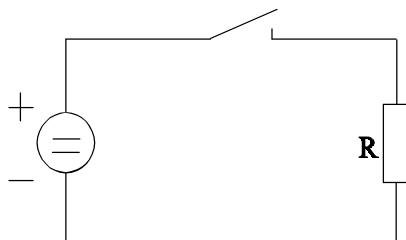
- a) Was ist die Ursache des elektrischen Stromes?
- b) Was ist die Ursache der elektrischen Spannung?

Aufgabe 2.1.2 (ohne Unterlagen)



Zeichnen Sie im oberen Bild jeweils die Spannungsrichtungen ein.

Aufgabe 2.1.3 (ohne Unterlagen)



Zeichnen Sie im oberen Bild die Strom- und Spannungsrichtungen ein.

Aufgabe 2.1.4 (ohne Unterlagen)

Zählen Sie die Wirkungen des elektrischen Stromes auf.

Aufgabe 2.1.5 (ohne Unterlagen)

Geben Sie Formelbuchstabe und Einheit der folgenden physikalischen Größen an:

- elektrischer Ladung
- elektrischer Strom
- elektrische Spannung
- elektrische Stromdichte

Aufgabe 2.1.6 (ohne Unterlagen)

Wie lautet der Zusammenhang zwischen Strom und Stromdichte?

Aufgabe 2.1.7 (ohne Unterlagen)

Wie lautet der Zusammenhang zwischen Strom und Ladung.

Aufgabe 2.1.8

In einem Leiter mit dem Durchmesser $d = 0.15 \text{ mm}$ fließen in einer Zeit von $t = 35 \text{ }\mu\text{s}$ eine Anzahl von $m = 3.06 \cdot 10^{10}$ Elektronen.

- a) Welche Ladung Q wird in der Zeit t transportiert?
- b) Wie groß ist die Stromstärke I ?
- c) Berechnen Sie die Stromdichte J .

Aufgabe 2.1.9

Der nicht dotierte Halbleiter Silizium hat bei Raumtemperatur eine Dichte von $n = 7.6 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3}$ freien Elektronen zur Eigenleistung zur Verfügung. Wie groß ist bei einer Stromdichte $J = 10 \text{ }\mu\text{A/mm}^2$ von die Drift-Geschwindigkeit der Elektronen v ?

Aufgaben 2.1.10

Ein dotierter Halbleiter mit der Ladungsträgerkonzentration $n = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ soll eine Stromdichte von $J = 150 \text{ mA/mm}^2$ aufweisen. Wie groß ist die Driftgeschwindigkeit v der Elektronen?

Aufgabe 2.1.11

Ein Kondensator soll mit einer Ladung $Q = 40 \cdot 10^{-3} \text{ As}$ aufgeladen werden. Die Ladung erfolgt über einen Draht von $d = 0.1 \text{ mm}$ Durchmesser mit Hilfe einer Konstantstromquelle, die $t = 2 \text{ s}$ eingeschaltet werden soll.

- a) Wie groß ist der Stromstärke I ?
- b) Berechnen Sie die Stromdichte J .
- c) Zu bestimmen ist die Driftgeschwindigkeit v der Elektronen.
- d) Wieviel Elektronen sind auf den Platten des Kondensators verschoben?

Aufgabe 2.2.1 (ohne Unterlagen)

Wie lautet das ohmsche Gesetz in den drei umgestellten Formen.

Aufgabe 2.2.2 (ohne Unterlagen)

Geben Sie den Zusammenhang zwischen Leitwert und Widerstand an.

Aufgabe 2.2.3 (ohne Unterlagen)

Wie lauten die drei Formen des ohmsche Gesetzes mit Leitwerten?

Aufgabe 2.2.4 (ohne Unterlagen)

Geben Sie die folgende Größe an:

- | | | | |
|----|------------------------------|-------------------------|-------|
| a) | $U = 100 \text{ V}$ | $R = 20 \text{ }\Omega$ | $I =$ |
| b) | $U = 10 \text{ V}$ | $I = 2 \text{ A}$ | $R =$ |
| c) | $I = 3 \text{ A}$ | $R = 20 \text{ }\Omega$ | $U =$ |
| d) | $U = 20 \text{ V}$ | $G = 2 \text{ S}$ | $I =$ |
| e) | $U = 40 \text{ V}$ | $I = 60 \text{ A}$ | $G =$ |
| f) | $I = 2 \text{ A}$ | $G = 0.1 \text{ S}$ | $U =$ |
| g) | $U = 20 \text{ kV}$ | $R = 5 \text{ M}\Omega$ | $I =$ |
| h) | $U = 10 \text{ }\mu\text{V}$ | $I = 2 \text{ nA}$ | $R =$ |
| i) | $I = 5 \text{ kA}$ | $R = 6 \text{ m}\Omega$ | $U =$ |

Aufgabe 2.2.5 (ohne Unterlagen)

Wie lautet die Formel für den Widerstand

a) $R = f(\kappa, l, A)$

b) $R = f(\rho, l, A)$

Aufgabe 2.2.6 (ohne Unterlagen)

Wie lautet die Formel für die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes

a) $R = f(R_{20}, \vartheta, \alpha)$

b) $R = f(R_{20}, \vartheta, \alpha, \beta)$

c) Was bedeutet darin R_{20} ?**Aufgabe 2.2.7** (ohne Unterlagen)

Geben Sie Formelbuchstabe und Einheit in V, A, s und K und evtl. abgeleitete SI-Einheit der folgenden physikalischen Größen an:

- elektrischer Widerstand

- elektrischer Leitwert

- spezifischer Widerstand

- spezifische Leitfähigkeit

- Temperaturbeiwert

Aufgabe 2.2.8 (ohne Unterlagen)

Um wieviel Prozent steigt der elektrische Widerstand der meisten Metalle bei 10 °C Temperaturerhöhung?

Aufgabe 2.2.9 (ohne Unterlagen)

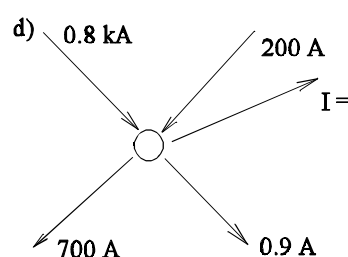
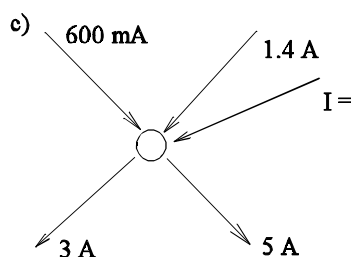
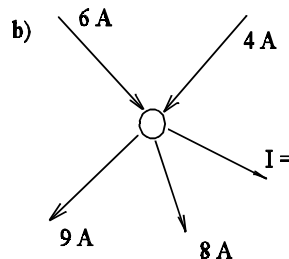
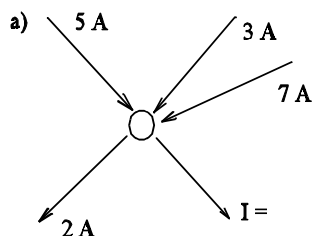
Welches Vorzeichen hat der Temperaturbeiwert

a) bei Metallen

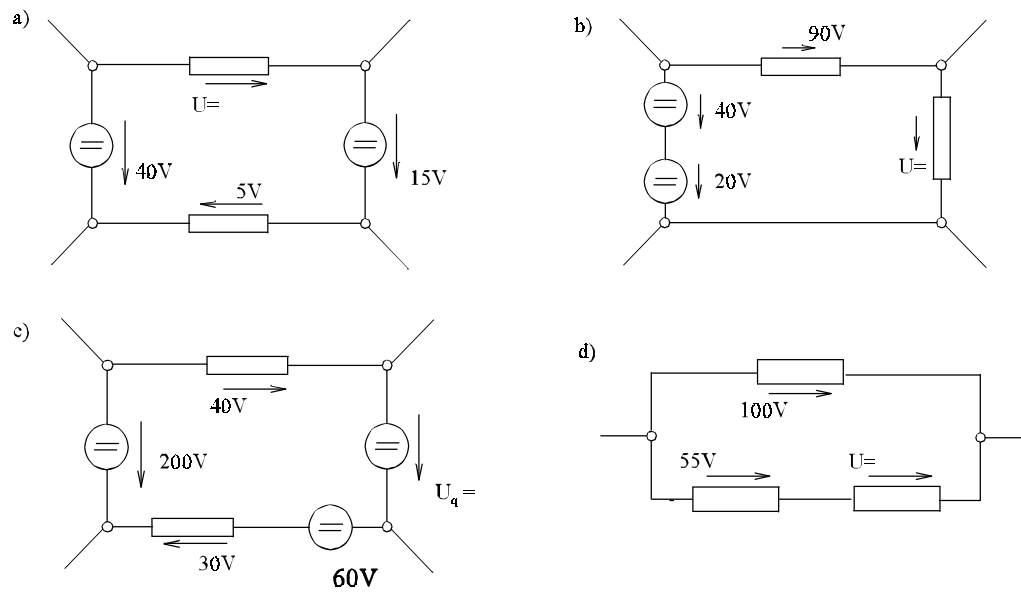
b) bei Halbleitern

Aufgabe 2.2.10Eine Glühlampe mit einer Wolframwendel nimmt im Betrieb bei $\vartheta = 2200$ °C einen Strom von $I = 0.5$ bei einer Spannung von $U = 230$ V auf. Wie groß ist der Einschaltstrom bei $\vartheta = 40$ °C?**Aufgabe 2.2.11**Eine Spule aus Cu-Draht mit $N = 2000$ Wicklungen, $D = 5$ cm Wicklungsdurchmesser, $d = 0.15$ mm Drahtdurchmesser liegt bei $\vartheta = 110$ °C an einer Spannung von $U = 10$ V. Wie groß ist der Strom bei I_{110} bei $\vartheta = 110$ °C?**Aufgabe 2.2.12**Eine Glühlampe mit einer Wolfram-Wendel hat im Nennbetrieb bei $U_N = 230$ V eine Stromaufnahme von $I_N = 0.25$ A bei $\vartheta_N = 2200$ °C. Weil die Spannung auf $U = 130$ V absinkt, stellt sich eine Temperatur der Wendel von $\vartheta = 1800$ °C ein. Wie groß ist der Strom I ?**Aufgabe 2.2.13**Eine elektrische Maschine enthält zur Temperatur-Messung eine Spule von $l = 250$ m und $d = 0.2$ mm aus Kupfer. Bei einer Spannung von $U = 10$ V wird ein Strom von 55 mA gemessen. Wie groß ist die Temperatur ϑ der Spule?**Aufgabe 2.3.1** (ohne Unterlagen)

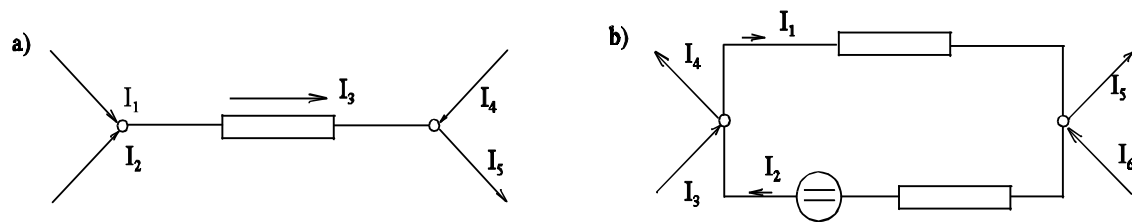
Berechnen Sie den fehlenden Stromwert



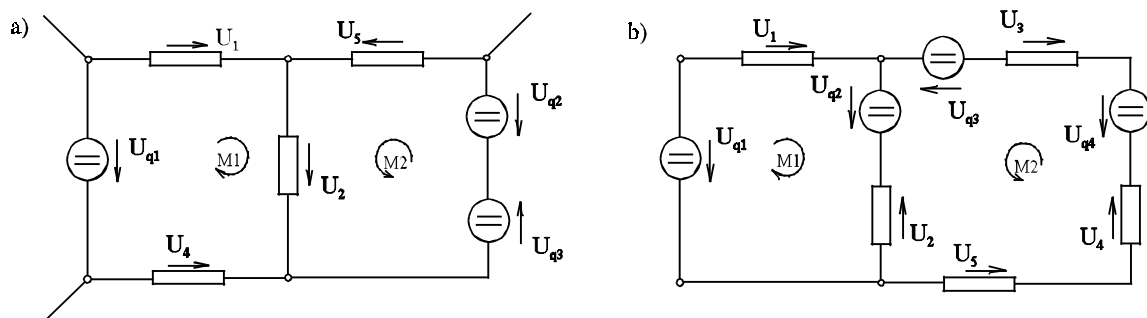
Aufgabe 2.3.2 (ohne Unterlagen)
Berechnen Sie den fehlenden Spannungswert



Aufgabe 2.3.3 (ohne Unterlagen)
Geben Sie für jeweils beide Knotenpunkte den Zusammenhang der Ströme an.



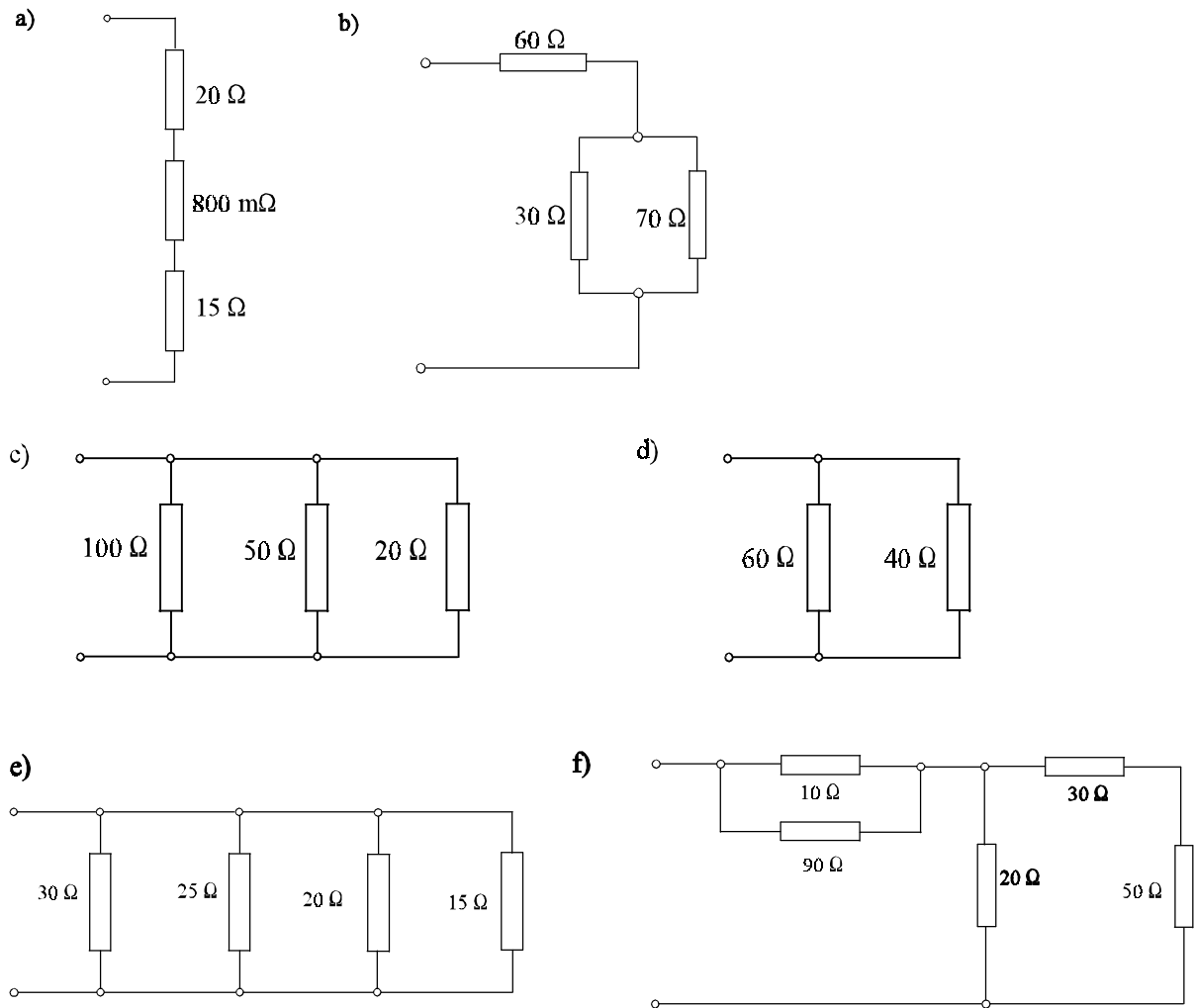
Aufgabe 2.3.4 (ohne Unterlagen)



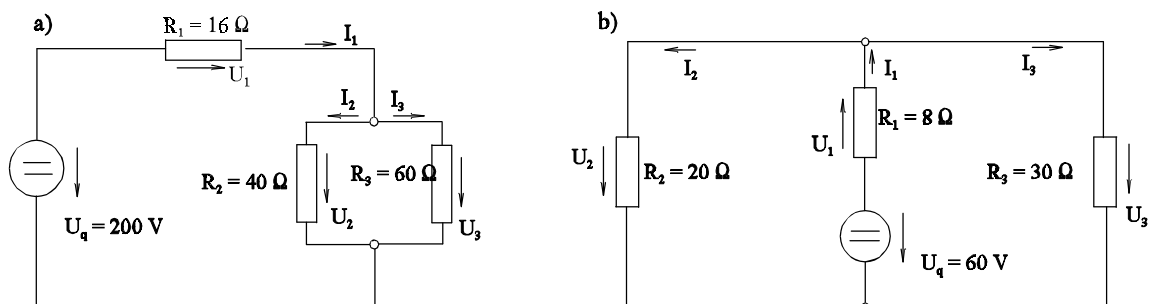
Geben Sie für jeweils beide Maschen den Zusammenhang der Spannungen an.

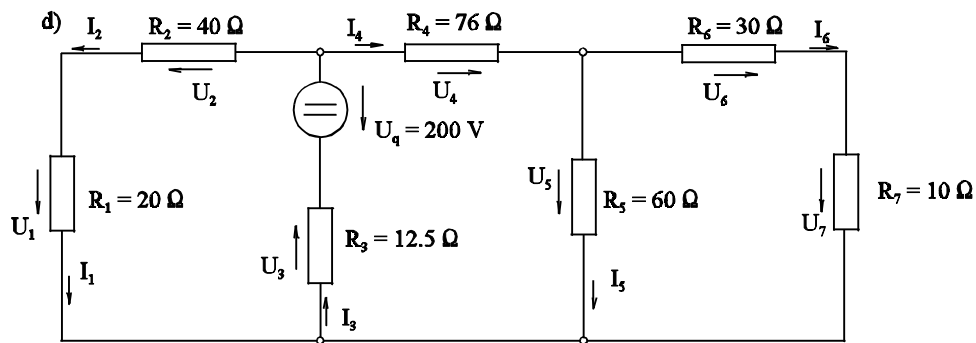
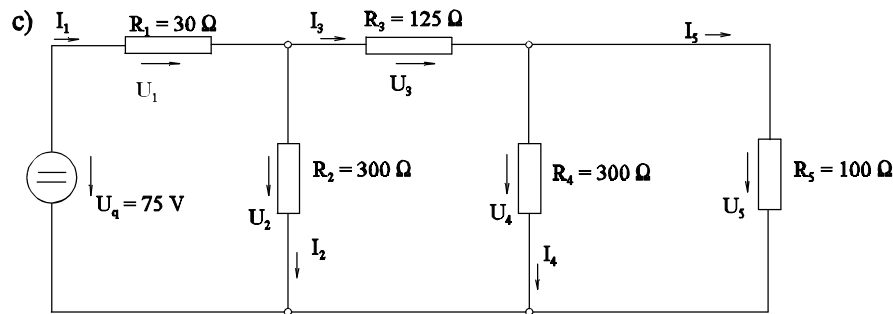
Aufgabe 2.4.1 (ohne Unterlagen)

Bestimmen Sie den Ersatzwiderstand an den offenen Klemmen:

**Aufgabe 2.4.2** (ohne Unterlagen, teils aufwendig aber nicht schwer)

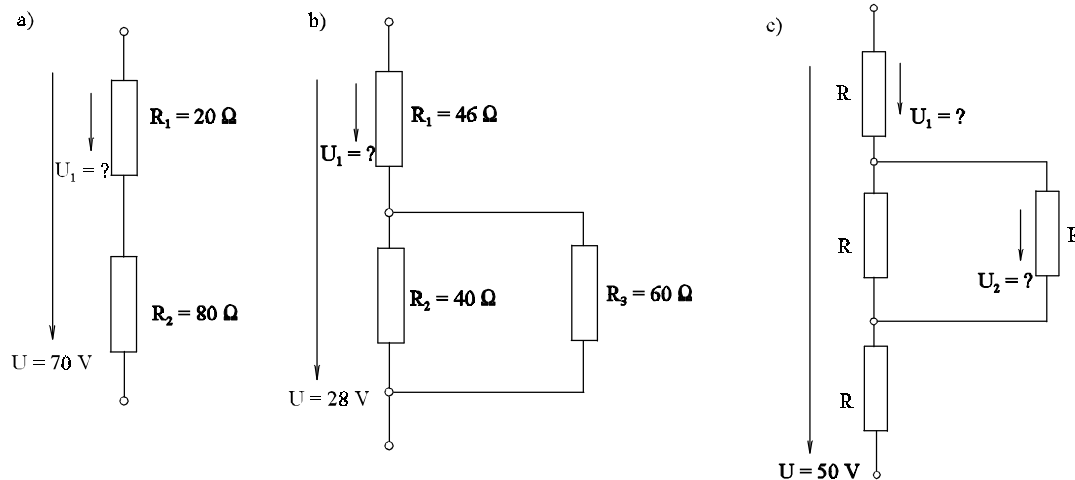
Berechnen Sie sämtliche Ströme und Spannungen mit der Methode "Ersatzwiderstand bilden".





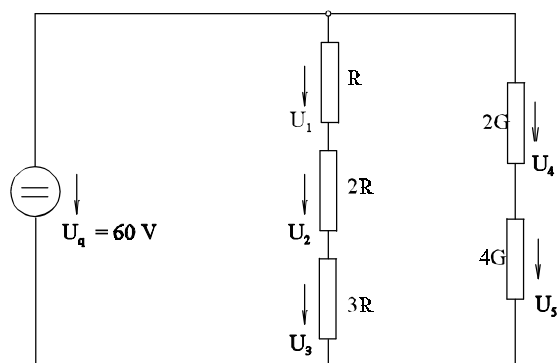
Aufgabe 2.5.1 (ohne Unterlagen)

Berechnen Sie mit Hilfe der Spannungsteilerregel die mit "?" gekennzeichneten Spannungen.



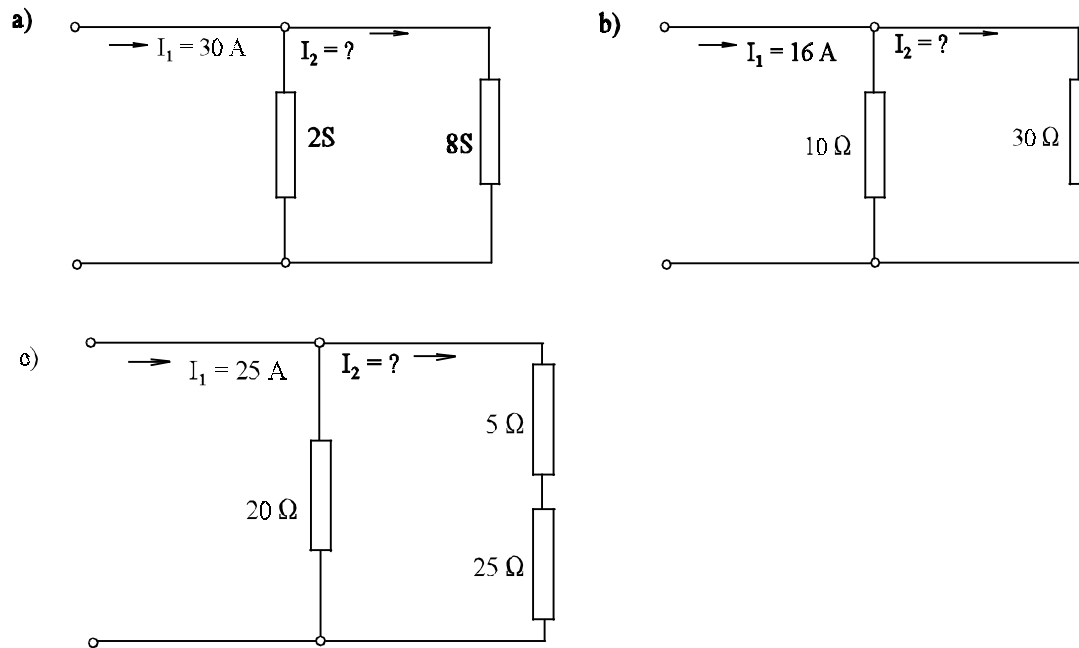
Aufgabe 2.5.2 (ohne Unterlagen)

Berechnen Sie mit Hilfe des Spannungsteilers die Spannungen U_1 bis U_5

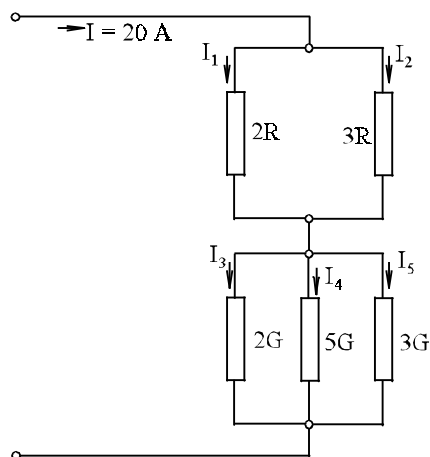


Aufgabe 2.5.3 (ohne Unterlagen)

Berechnen Sie nach der Stromteilregel die mit "?" gekennzeichneten Ströme.

**Aufgabe 2.5.4** (ohne Unterlagen)

Berechnen Sie mit Hilfe des Stromteilers die Ströme I_1 bis I_5 .

**Aufgabe 2.5.5** (ohne Unterlagen)

Wie groß ist der Belastungswiderstand R_b eines Potentiometers zu wählen, damit die Ausgangsspannung in etwa linear von der Schleifenstellung abhängig ist?

Aufgabe 2.5.6

Ein Potentiometer mit dem Widerstand $R = 1 \text{ k}\Omega$ wird mit einem $10 \text{ k}\Omega$ Widerstand belastet. Die Versorgungsspannung beträgt $U_q = 10 \text{ V}$. Wie groß ist die Abweichung der Schleiferspannung U vom erwarteten Wert bei der Schleiferstellung $x = 0.7$?

Aufgabe 2.5.7 (Vorlesung)

Ein Potentiometer mit dem Widerstand von $R = 5 \text{ k}\Omega$ soll bei einer Schleiferstellung von $x = 0.7$ eine Abweichung von höchstens 0.1% bezogen auf den Entwert aufweisen. Wie groß ist der Belastungswiderstand R_b zu wählen?

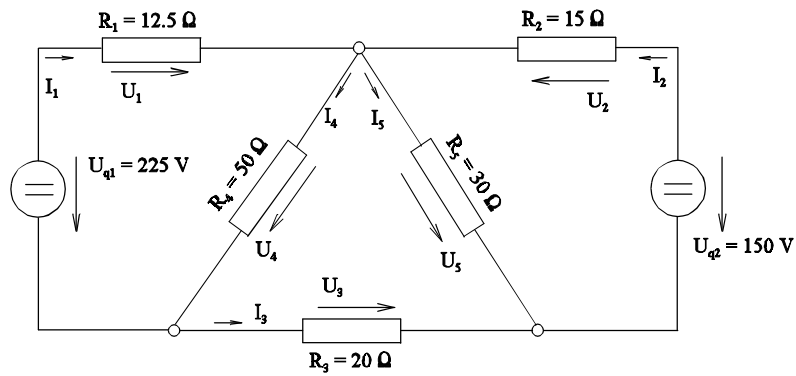
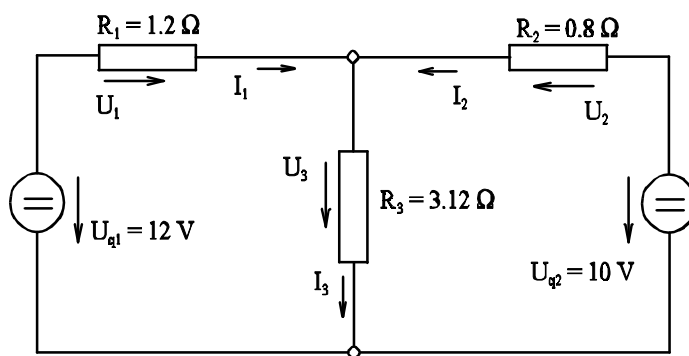
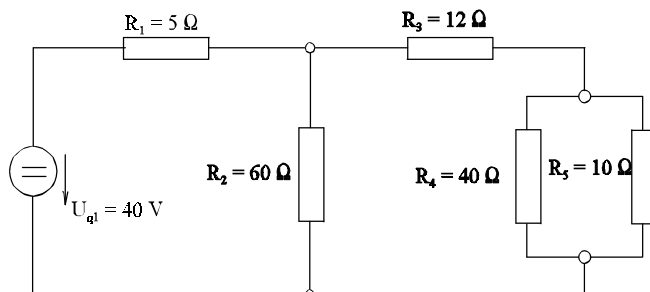
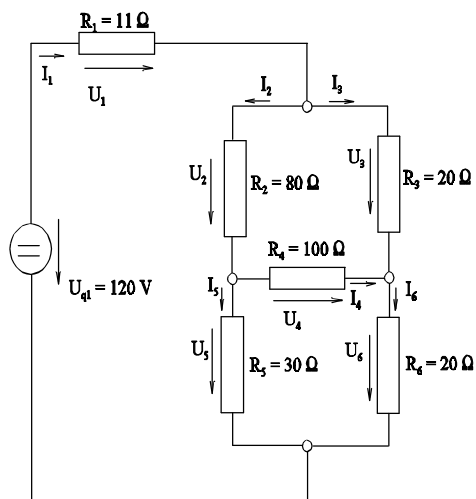
Aufgabe 2.6.1 (ohne Unterlagen)

Welche physikalische Größe ist dem Zeigerausschlag proportional?

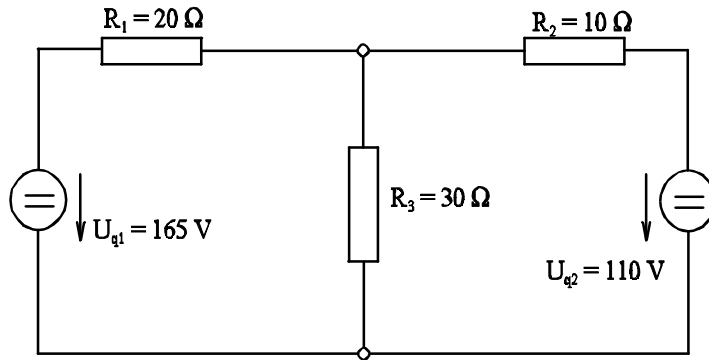
- a) beim Drehspulmeßgerät b) beim Dreheisenmeßgerät

Aufgabe 2.6.2 (ohne Unterlagen)

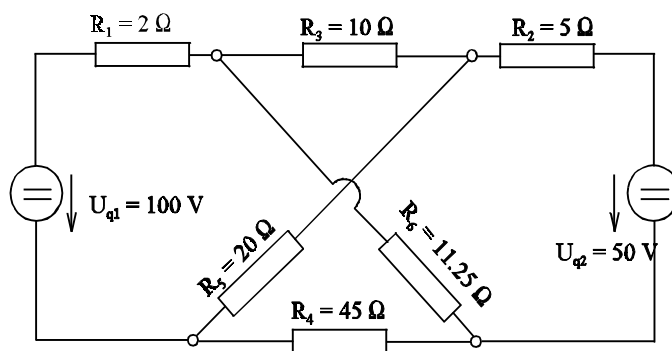
Welcher Mittelwert wird gemessen?

Netzwerk 3A (Beispiel-Netzwerk)**Netzwerk 3B****Netzwerk 3C****Netzwerk 3D**

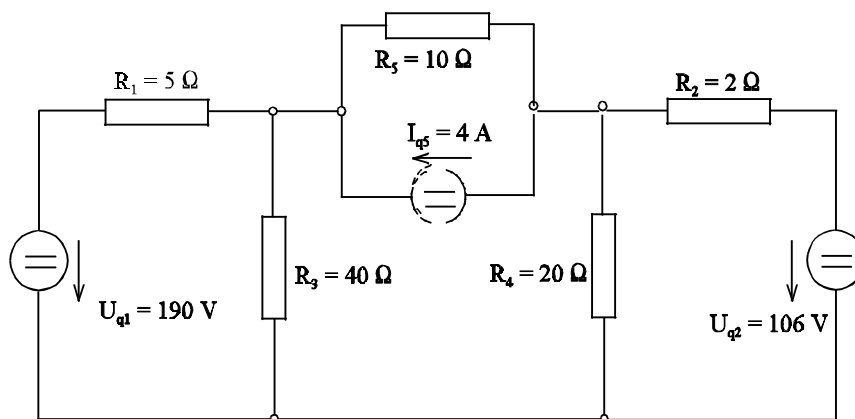
Netzwerk 3E



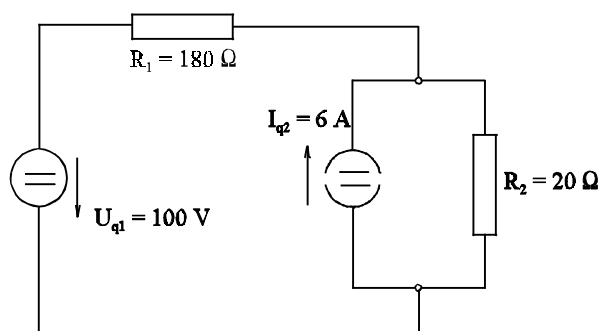
Netzwerk 3F



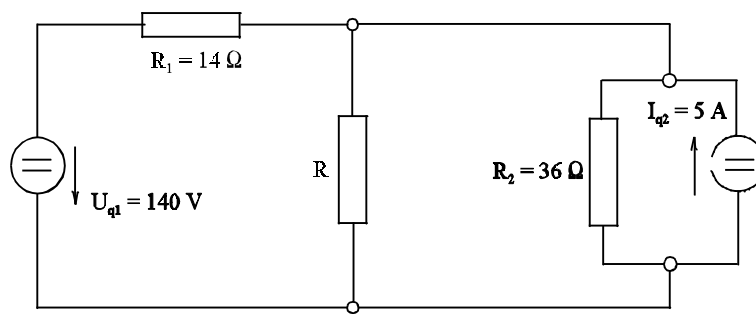
Netzwerk 3G



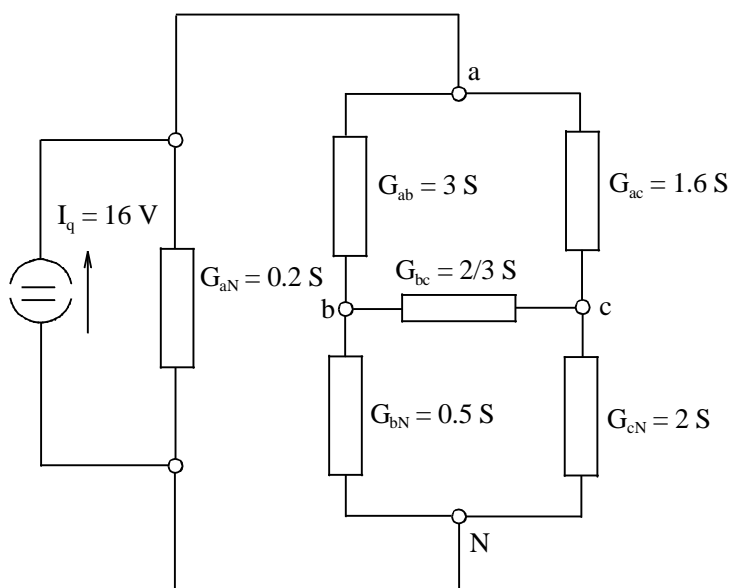
Netzwerk 3H



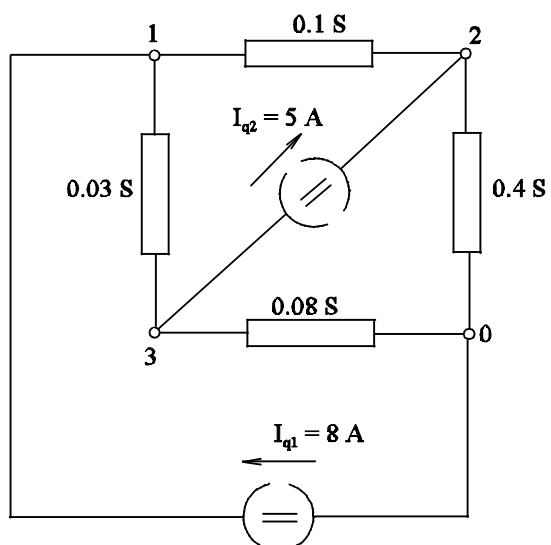
Netzwerk 3I



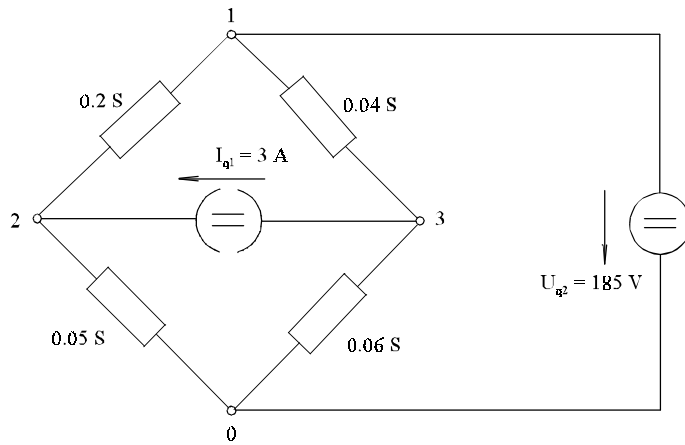
Netzwerk 3J



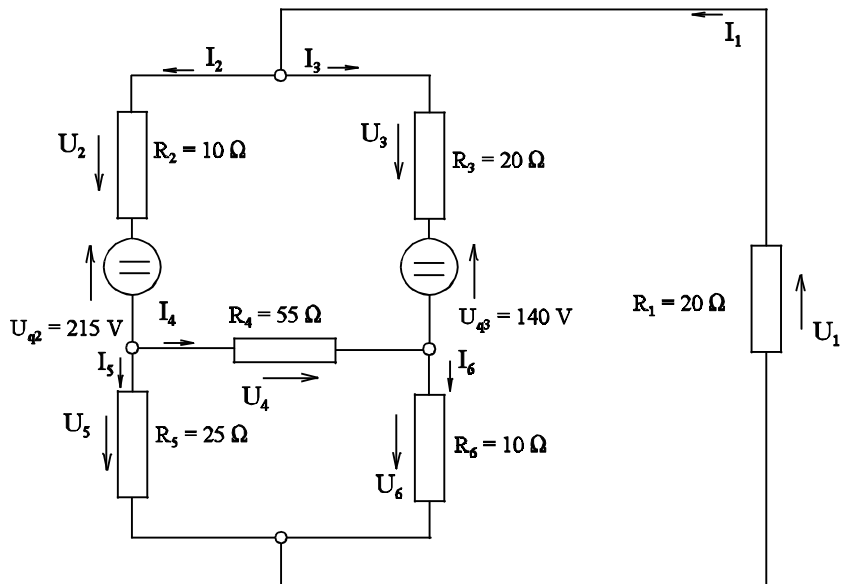
Netzwerk 3K



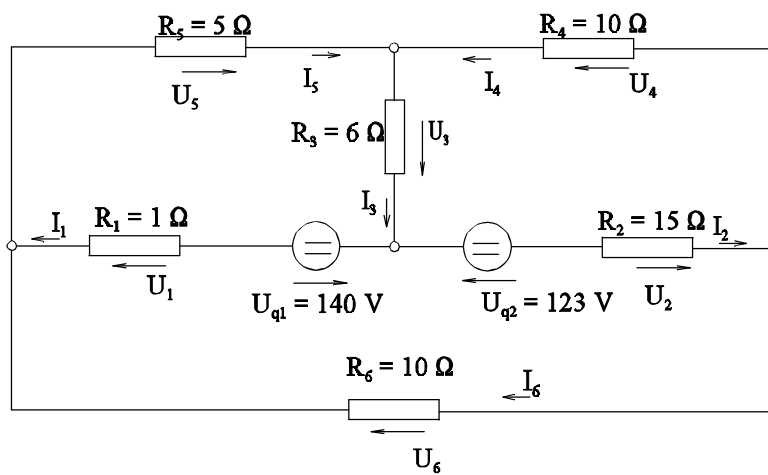
Netzwerk 3L



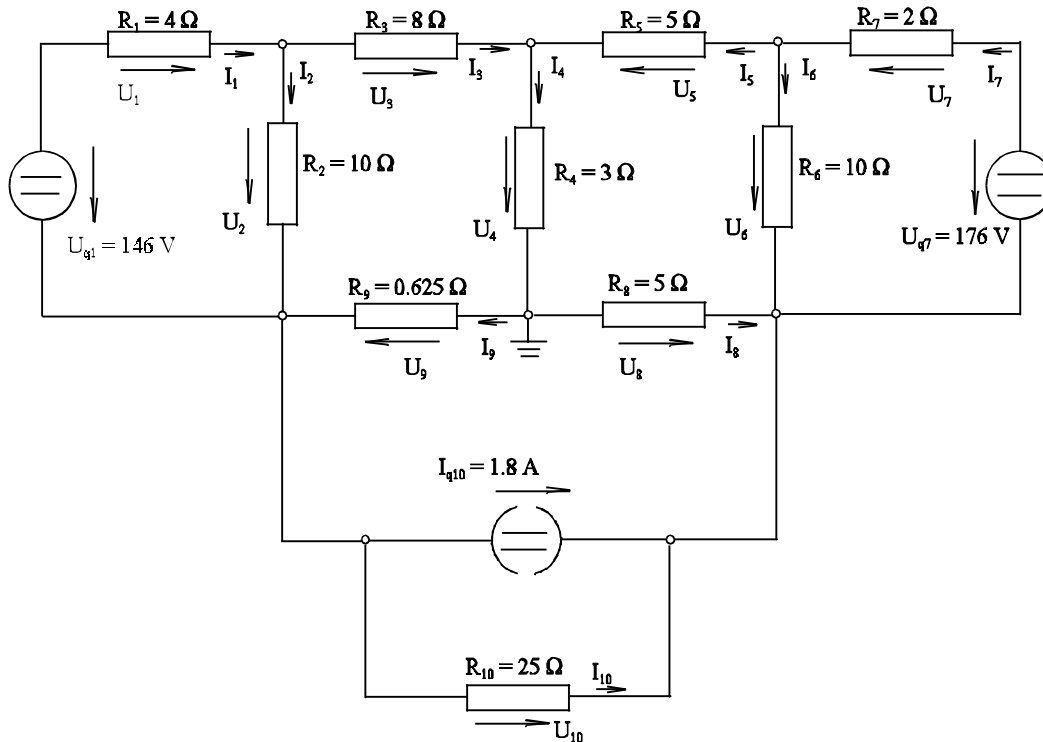
Netzwerk 3M



Netzwerk 3N



Netzwerk 30

**Aufgabe 3.1.1** (ohne Unterlagen)

- a) Was ist ein Knoten? b) Was ist ein Zweig? c) Was ist eine Masche?

Aufgabe 3.1.2 (ohne Unterlagen)

Mit welchem Formelbuchstaben werden abgekürzt

- a) Anzahl der Zweige? b) Anzahl der Knoten? c) Anzahl der Maschen?

Aufgabe 3.1.3 (ohne Unterlagen)

Geben Sie die auf $U_{\text{Norm}} = 1 \text{ V}$, $R_{\text{Norm}} = 1 \Omega$ und $I_{\text{Norm}} = 1 \text{ A}$ normierten Größen an.

- a) $U = 100 \text{ V}$ b) $I = 20 \text{ A}$ c) $R = 50 \Omega$

Aufgabe 3.1.4 (ohne Unterlagen)

Geben Sie die auf $U_{\text{Norm}} = 1 \text{ kV}$, $R_{\text{Norm}} = 1 \text{ M}\Omega$ und $I_{\text{Norm}} = 1 \text{ mA}$ normierten Größen an.

- a) $U = 20 \text{ kV}$ b) $I = 50 \text{ mA}$ c) $R = 0.4 \text{ M}\Omega$

Aufgabe 3.1.5 (ohne Unterlagen)

Geben Sie das ohmsche Gesetz in normierter Form an für:

- | | | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|---|
| a) $U_{\text{Norm}} = 20 \text{ kV}$ | $I_{\text{Norm}} = 50 \text{ mA}$ | $R_{\text{Norm}} = 0.4 \text{ M}\Omega$ |
| b) $U_{\text{Norm}} = 20 \text{ V}$ | $I_{\text{Norm}} = 5 \text{ A}$ | $R_{\text{Norm}} = 1 \Omega$ |
| c) $U_{\text{Norm}} = 60 \text{ V}$ | $I_{\text{Norm}} = 5 \text{ A}$ | $R_{\text{Norm}} = 8 \Omega$ |

Aufgabe 3.1.6 (ohne Unterlagen)

Berechnen Sie in normierter Form den fehlenden Wert an einem Widerstand mit $U_{\text{Norm}} = 20 \text{ V}$, $I_{\text{Norm}} = 2 \text{ A}$ und $R_{\text{Norm}} = 10 \Omega$.

- a) $U = 80 \text{ V}$ $R = 20 \Omega$
 b) $I = 18 \text{ A}$ $R = 2 \Omega$

Aufgabe 3.1.7 (ohne Unterlagen)

Geben Sie für die Netzwerke 3A bis 3H die Anzahl der Knoten und Zweige an.

Aufgabe 3.2.1 (ohne Unterlagen)

Gegeben ist ein Netzwerk mit z Zweigen und k Knoten, daß mit Hilfe von Maschen- und Knotenanalyse berechnet werden soll.

- Wie werden die Spannungen als Variable eliminiert?
- Wieviele unbekannte physikalische Größen sind zu bestimmen?
- Wieviele Gleichungen sind dazu erforderlich?
- Wieviele Knotengleichungen sind auswertbar?
- Wieviele Maschengleichungen sind auswertbar?

Aufgabe 3.2.2 (ohne Unterlagen)

Welche Möglichkeit zur Lösung linearer Gleichungssysteme gibt es?

Aufgabe 3.2.3

Bestimmen Sie alle Ströme und Spannungen mit Hilfe der Knoten- und Maschenanalyse.

- | | | |
|----------------|----------------|----------------|
| a) Netzwerk 3E | b) Netzwerk 3D | c) Netzwerk 3G |
| d) Netzwerk 3N | e) Netzwerk 3O | |

Aufgabe 3.3.1

Was ist beim manuellen Maschenstromverfahren einzutragen? Welches Vorzeichen weisen die Elemente auf?

- | | | |
|---------------------------|--------------------------|-----------------------|
| a) in der Hauptdiagonalen | b) in der Nebenelementen | c) im Anregungsvektor |
|---------------------------|--------------------------|-----------------------|

Aufgabe 3.3.2

Berechnen Sie mit Hilfe des manuellen Maschenstromverfahrens sämtliche Ströme und Spannungen.

- | | |
|----------------|----------------|
| a) Netzwerk 3E | b) Netzwerk 3N |
| c) Netzwerk 3D | d) Netzwerk 3O |

Aufgabe 3.3.3

Berechnen Sie mit Hilfe des Maschenstromverfahrens für Rechner sämtliche Ströme und Spannungen.

- | | |
|----------------|----------------|
| a) Netzwerk 3B | b) Netzwerk 3D |
| c) Netzwerk 3G | d) Netzwerk 3O |

Aufgabe 3.4.1

Der Strom I_3 des Netzwerkes 3E ist mit Hilfe von Quellenwandlungen zu bestimmen.

Aufgabe 3.4.2

Der Strom I_1 des Netzwerkes 3G ist mit Hilfe von Quellenwandlungen zu bestimmen.

Aufgabe 3.4.3

Der Strom I_1 des Netzwerkes 3D ist mit Hilfe von Stern-Dreieck-Wandlung der Widerstände R_3 , R_4 und R_6 zu bestimmen.

Aufgabe 3.4.4

Der Strom I_1 des Netzwerkes 3M ist mit Hilfe von Netzwerkumwandlungen zu bestimmen. Hinweis: Eine Methode ist nicht ausreichend.

Aufgabe 3.4.5

Die Spannung U_6 des Netzwerkes 3N ist mit Hilfe von Netzwerkumwandlungen zu bestimmen. Hinweis: Eine Methode ist nicht ausreichend.

Aufgabe 3.4.6

Bestimmen Sie den Strom I_{12} des Netzwerkes 3K.

Aufgabe 3.5.1

Berechnen Sie das Netzwerk 3B mit Hilfe des Überlagerungsprinzips.

Aufgabe 3.6.1

Berechnen Sie mit Hilfe der Ersatzspannungsquelle:

- a) den Strom I_3 des Netzwerkes 3E b) den Strom I_4 des Netzwerkes 3D

Aufgabe 3.7.1

Berechnen Sie sämtliche Ströme und Spannungen mit Hilfe des manuellen Knotenpunkt-Potential-Verfahrens.

- a) Netzwerk 3M b) Netzwerk 3N c) Netzwerk 3O

Aufgabe 3.7.2

Berechnen Sie sämtliche Ströme und Spannungen mit Hilfe des Knotenpunkt-Potential-Verfahrens für Rechner.

- a) Netzwerk 3D b) Netzwerk 3G c) Netzwerk 3K

Aufgabe 4.5.1

- | | | | | |
|----|---------------------|---------------------|---------|---------|
| a) | $P = 2 \text{ kW}$ | $U = 220 \text{ V}$ | $I = ?$ | |
| b) | $R = 100 \Omega$ | $U = 220 \text{ V}$ | $P = ?$ | |
| c) | $R = 10 \Omega$ | $I = 20 \text{ A}$ | $P = ?$ | |
| d) | $R = 60 \Omega$ | $P = 2 \text{ kW}$ | $U = ?$ | $I = ?$ |
| e) | $P = 200 \text{ W}$ | $U = 100 \text{ V}$ | $I = ?$ | |
| f) | $R = 20 \Omega$ | $U = 100 \text{ V}$ | $P = ?$ | |
| g) | $R = 40 \Omega$ | $I = 15 \text{ A}$ | $P = ?$ | |
| h) | $R = 90 \Omega$ | $P = 300 \text{ W}$ | $U = ?$ | $I = ?$ |

Aufgabe 4.5.2

Eine Batterie mit einer Leerlaufspannung von 12 V und einem Innenwiderstand von $R_i = 1 \Omega$ wird mit einem Widerstand $R = 5 \Omega$ belastet.

- a) Wie groß sind der Strom I , die Spannung U_R , die Leistung P im Widerstand, die Verluste P_v in der Spannungsquelle und der Wirkungsgrad η .
 b) Der Wirkungsgrad soll größer als 90% sein. Welchen Bereich darf der Widerstand R haben.
 c) Nun soll die Quelle die maximale Leistung abgeben. Bei welchem Widerstandswert R ist dieses der Fall. Wie groß ist dann die Leistung P die Verluste in der Quelle P_v und der Wirkungsgrad η .

Aufgabe 4.5.3

Ein Verbraucher $R_3 = 25 \Omega$ wird über zwei parallel geschaltete Spannungsquellen versorgt. Die Daten der Spannungsquellen:

$$\begin{array}{ll} U_{q1} = 12 \text{ V} & R_1 = 1 \Omega \\ U_{q2} = 12 \text{ V} & R_2 = 3 \Omega \end{array}$$

- a) Das ESB ist zu zeichnen.
 b) Man bestimme alle Ströme und Spannungen.
 c) Welche Leistungen geben die Quellen 1 und 2 ab und welche Leistung wird im Widerstand umgesetzt.
 d) Wie groß sind die Verlustleistungen der Quellen 1 und 2.
 e) Die Einzelwirkungsgrade der Quellen η_1 , η_2 und der Gesamtwirkungsgrad η sind zu bestimmen.
 f) Bei welchem Widerstand R_3 erfolgt die maximale Leistungsaufnahme in R_3 . Wie groß ist dann diese Leistungsaufnahme.

Aufgabe 4.5.4

Optimieren Sie die folgenden Widerstände, so daß in diesen Widerständen eine maximale Leistung auftritt. Berechnen Sie die maximale Leistung P_{\max} .

- a) Widerstand R_3 Netzwerk 3E
 b) Widerstand R Netzwerk 3I
 c) Widerstand R_4 Netzwerk 3M

Aufgabe 4.6.1

Eine Kochplatte für einen Elektroherd soll mit Hilfe einer Heizwendel aus Konstantan hergestellt werden. Die Herdplatte soll an einer Spannung von $U = 220 \text{ V}$ eine Leistung von $P = 2000 \text{ W}$ aufnehmen. Der Wendeldurchmesser beträgt 5 mm bei einer Wendelsteigung von $a = 2 \text{ mm}$. Der Durchmesser des Drahtes ist $d_{ko} = 0.2 \text{ mm}$.

$$\kappa_{ko} = 2 \cdot 10^6 \text{ 1/(\Omega m)} \qquad \alpha_{ko} = 0.04 \cdot 10^{-3} \text{ 1/K}$$

- a) Wie lang muß die Wendel l_{we} für $\vartheta = 20^\circ \text{C}$ ausgeführt werden.
 b) Man bestimme die Länge der Wendel l_{we}^* für $\vartheta = 100^\circ \text{C}$.

Aufgabe 4.6.2

Ein gut isolierter Heizwasserbereiter hat eine Leistungsaufnahme von $P = 4 \text{ kW}$ und eine Füllmenge von 80 l. Wie lange benötigt man Wasser von 20°C auf 70°C zu erwärmen ($c_{\text{Wasser}} = 4187 \text{ W s kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$).

Aufgabe 4.6.3

Wie lange benötigt man, unter der Annahme, daß eine Kochplatte einen Wirkungsgrad von $\eta = 70\%$ hat und eine Leistung $P = 1400 \text{ W}$ aufnimmt, 3 l Wasser von $\vartheta_1 = 20^\circ\text{C}$ auf $\vartheta_2 = 100^\circ\text{C}$ zu erwärmen ($c_{\text{Wasser}} = 4187 \text{ W s kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$).

Aufgabe 4.6.4

Wie lange dauert es bis 2 l Wasser von $\vartheta = 100^\circ\text{C}$ bei einer Leistung von 2 kW und einem Wirkungsgrad von $\eta = 90\%$ verkocht sind ($r_{\text{Wasser}} = 2256 \text{ kW s kg}^{-1}$)

Aufgabe 4.6.5

Eine Kochplatte hat eine Leistungsaufnahme von 2 kW und einen Wirkungsgrad $\eta = 90\%$. Zur Zeit $t_0 = 0$ werden 10 l Wasser von $\vartheta_0 = 20^\circ\text{C}$ erhitzt. Welche Temperatur ϑ_i hat das Wasser nach $t_1 = 5 \text{ min}$, $t_2 = 10 \text{ min}$ und $t_3 = 15 \text{ min}$ ($c_{\text{Wasser}} = 4187 \text{ W s kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$).

Aufgabe 4.6.6

Eine Kochplatte mit einer Leistungsaufnahme von $P = 1000 \text{ W}$ und einem Wirkungsgrad von $\eta = 0.85$ erhitzt 0.5 l Wasser von $\vartheta_0 = 20^\circ\text{C}$. Welche Temperatur ϑ_i und welche Masse m_i sind nach der Zeit $t_1 = 1 \text{ min}$, $t_2 = 2 \text{ min}$, $t_3 = 3 \text{ min}$, $t_4 = 4 \text{ min}$, $t_5 = 5 \text{ min}$, $t_6 = 10 \text{ min}$ und $t_7 = 20 \text{ min}$ vorhanden. ($c_{\text{Wasser}} = 4187 \text{ W s kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$) ($r_{\text{Wasser}} = 2256 \text{ kW s kg}^{-1}$)

Aufgabe 4.7.1

Ein Gleichstrommotor mit einer Anschlußspannung von 180 V soll eine Last von $m = 2 \text{ t}$ in 20 s von $v_1 = 10 \text{ m/s}$ auf $v_2 = 20 \text{ m/s}$ beschleunigen. Der Motor hat einen Wirkungsgrad von $\eta = 80\%$.

- Wie groß ist die Differenz der kinetischen Energie.
- Die mechanische Leistung ist zu berechnen.
- Bestimmen Sie die elektrische Leistung.
- Welcher konstante Gleichstrom I wäre dazu erforderlich?
- Bestimmen Sie den Strom I in allgemeiner Form.

Aufgabe 4.7.2

Ein Gleichstrommotor nimmt bei einer Spannung von $U = 400 \text{ V}$ einen Strom von $I = 100 \text{ A}$ auf. Der Wirkungsgrad beträgt $\eta = 85\%$. In welcher Zeit t beschleunigt er eine Masse von $m = 500 \text{ kg}$ von $v_1 = 2 \text{ m/s}$ auf $v_2 = 8 \text{ m/s}$?

Aufgabe 4.7.3

Ein Gleichstrommotor mit einer Anschlußspannung von $U = 400 \text{ V}$ soll eine Last von $m = 4 \text{ t}$ mit einer Geschwindigkeit von $v = 5 \text{ m/s}$ heben ($g = 10 \text{ m/s}^2$). Der Motor hat einen Wirkungsgrad von $\eta = 90\%$.

- Welche mechanische Leistung ist erforderlich.
- Man berechne die elektrische Leistung.
- Welche Stromaufnahme hat der Motor.
- Geben Sie den Motorstrom in allgemeiner Form an.

Aufgabe 4.7.4

Ein Gleichstrommotor nimmt bei einer Spannung von $U = 200 \text{ V}$ einen Strom von $I = 10 \text{ A}$ auf. Der Motor hat einen Wirkungsgrad von $\eta = 80\%$. Mit welcher Geschwindigkeit v kann er eine Last von $m = 100 \text{ kg}$ heben ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

Aufgabe 4.8.1

Ein elektrischer Gleichstromverbraucher mit einer Nennleistung $P_N = 2000 \text{ W}$ und einer Nennspannung $U_N = 200 \text{ V}$ soll über eine 100 m lange Cu-Leitung gespeist werden. Wie groß muß der Querschnitt der Cu-Leitung mindestens gewählt werden, damit der Spannungsabfall auf der Leitung kleiner 5% bleibt der Spannungsquelle ($\kappa_{\text{Cu}} = 56 \text{ m/}\Omega\text{mm}^2$).

Aufgabe 4.8.2

Ein elektrischer Gleichstromverbraucher mit einer Nennleistung $P_N = 8000 \text{ W}$ soll über eine 500 m lange Cu-Leitung mit einem Querschnitt von $A = 96 \text{ mm}^2$ gespeist werden. Welche Übertragungsspannung sollte mindestens gewählt werden, damit der Spannungsabfall auf der Leitung kleiner als 5% beträgt ($\kappa_{\text{Cu}} = 56 \text{ m/}\Omega\text{mm}^2$).

Aufgabe 5.1.1

An einem Stab der Länge $l = 1 \text{ m}$ und dem Querschnitt $A = 1 \text{ mm}^2$ liegt die Spannung U . Wieviel Elektronen pro Sekunde m fließen durch den Stab?

gegeben:	$\rho_{\text{Leiter}} = 0.1 \text{ } \Omega\text{mm}^2/\text{m}$	$U_{\text{Leiter}} = 0.1 \text{ V}$
	$\rho_{\text{HL}} = 10^8 \text{ } \Omega\text{mm}^2/\text{m}$	$U_{\text{HL}} = 100 \text{ V}$
	$\rho_{\text{iso}} = 10^{16} \text{ } \Omega\text{mm}^2/\text{m}$	$U_{\text{iso}} = 100 \text{ KV}$
	$\rho_{\text{iso}} = 10^{24} \text{ } \Omega\text{mm}^2/\text{m}$	

Aufgabe 5.2.1 (Diode, grafische und analytische Lösung)

Eine Diode wird in Durchlaßrichtung von einer Spannungsquelle $U_q = 2 \text{ V}$ über einen Widerstand $R = 20 \text{ } \Omega$ betrieben.

Folgende Werte wurden bei der Aufnahme der Diodenkennlinie gemessen:

$U_1 = 0 \text{ V}$	$I_1 = 0 \text{ A}$
$U_2 = 0.5 \text{ V}$	$I_2 = 25 \text{ mA}$
$U_3 = 1 \text{ V}$	$I_3 = 100 \text{ mA}$

Die Diodenkennlinie ist durch eine ganze rationale Funktion anzunähern.

- Zeichnen Sie das ESB.
- Bestimmen Sie die Koeffizienten der Diodenkennlinie (Koeffizienten der ganzen rationalen Funktion).
- Zeichnen Sie die Kennlinie der Diode $I = f(U)$. (1 cm \triangleq 0.1 V, 1 cm \triangleq 10 mA)
- Zeichnen Sie die Kennlinie der Spannungsquelle U_q und des Widerstandes R in das gleiche Diagramm.
- Bestimmen Sie Strom und Spannung an der Diode grafisch.
- Bestimmen Sie Strom und Spannung an der Diode analytisch.

Aufgabe 5.2.2 (Diode, grafisch parallelschalten)

Eine Diode in Durchlaßrichtung mit der Kennlinie $I = 100 \text{ mA} \cdot (U/1 \text{ V})^2$, parallel zu einem Widerstand $R_2 = 25 \text{ } \Omega$, wird in Reihe zu $R_1 = 20 \text{ } \Omega$ an einer Spannungsquelle $U_q = 2 \text{ V}$ betrieben.

- Zeichnen Sie das ESB.
- Die Kennlinie $I = f(U)$ für die Diode ist zu zeichnen (1 cm \triangleq 0.1 V, 1 cm \triangleq 10 mA)
- In das gleiche Diagramm ist die Kennlinie von R_2 zu zeichnen.
- Die Parallelschaltung von R_2 und Diode ist grafisch auszuführen.
- In das gleiche Diagramm ist die Kennlinie aus der Kombination der Spannungsquelle U_q und des Widerstandes R_1 zu zeichnen.
- Bestimmen Sie alle Ströme und Spannungen aus dem Diagramm.
- Der exakte Wert von Strom und Spannung an der Diode ist analytisch zu bestimmen.

Aufgabe 5.2.3 (Diode, grafische Reihenschaltung)

Eine Diode in Durchlaßrichtung mit der Kennlinie $I = 100 \text{ mA} (U/1 \text{ V})^2$, in Reihe mit einem Widerstand $R = 5 \text{ } \Omega$, wird an einer Spannungsquelle $U_q = 2.4 \text{ V}$ mit Innenwiderstand $R_i = 24 \text{ } \Omega$ angeschlossen.

- Zeichnen Sie das ESB.
- Zeichnen Sie die Kennlinie der Diode $I = f(U)$. (1 cm \triangleq 0.1 V, 1 cm \triangleq 10 mA)
- Die Kennlinie des Widerstandes R ist in das gleiche Diagramm zu zeichnen.
- Die Reihenschaltung von Diode und Widerstand R ist grafisch auszuführen.
- Die Kennlinie der Quelle mit Innenwiderstand ist in das gleiche Diagramm einzutragen.
- Alle Ströme und Spannungen sind grafisch zu bestimmen.
- Die Werte aus f sind analytisch zu berechnen.

Aufgabe 5.2.4 (VDR, grafische und analytische Methode)

Ein VDR-Widerstand mit den Daten $C = 50 \text{ V}$ und $\beta = 0.25$ wird an eine ideale Spannungsquelle $U_q = 100 \text{ V}$ in Reihe mit einem Widerstand $R = 100 \text{ } \Omega$ betrieben. Die Kennlinie des VDR wird durch $U = c \left(\frac{I}{1 \text{ A}} \right)^\beta$ beschrieben.

- Zeichnen Sie das ESB.
- Die Kennlinie $I = f(U)$ für den VDR ist zu zeichnen (1 cm \triangleq 10 V, 1 cm \triangleq 0.1 A)
- In das gleiche Diagramm ist die Kennlinie aus der Kombination der Spannungsquelle U_q und des Widerstandes R zu zeichnen.
- Bestimmen Sie Strom und Spannung am VDR aus dem Diagramm.
- Der exakte Wert von Strom und Spannung am VDR ist iterativ numerisch zu bestimmen.

Aufgabe 5.2.5 (VDR, grafisch parallelschalten)

Ein VDR-Widerstand mit den Daten $C = 50 \text{ V}$ und $\beta = 0.25$, parallel mit einem Widerstand $R_2 = 160 \text{ } \Omega$, wird in Reihe mit einem Widerstand $R_1 = 100 \text{ } \Omega$ an einer Spannungsquelle $U_q = 120 \text{ V}$ betrieben. Die Kennlinie des VDR

wird durch $U = c \left(\frac{I}{1 \text{ A}} \right)^\beta$ beschrieben.

- Zeichnen Sie das ESB.
- Die Kennlinie $I = f(U)$ für den VDR ist zu zeichnen ($1 \text{ cm} \triangleq 10 \text{ V}$, $1 \text{ cm} \triangleq 0.1 \text{ A}$).
- In das gleiche Diagramm ist die Kennlinie von R_2 zu zeichnen.
- Die Parallelschaltung von R_2 und VDR ist grafisch auszuführen.
- In das gleiche Diagramm ist die Kennlinie aus der Kombination der Spannungsquelle U_q und des Widerstandes R_1 zu zeichnen.
- Bestimmen Sie alle Ströme und Spannungen aus dem Diagramm.
- Der exakte Wert der Ströme und Spannungen ist iterativ numerisch zu bestimmen.

Aufgabe 5.2.6 (VDR-Linearisierung)

Ein VDR-Widerstand mit den Daten $C = 50 \text{ V}$ und $\beta = 0.25$ wird an eine Spannungsquelle $U_q = 100 \text{ V}$ mit Innenwiderstand $R = 100 \Omega$ angeschlossen. Die Kennlinie des VDR wird durch $U = c \left(\frac{I}{1 \text{ A}} \right)^\beta$ beschrieben.

- Berechnen Sie Strom und Spannung im Arbeitspunkt.
- Das linearisierte ESB für den VDR ist anzugeben.
- Das linearisierte Gesamt ESB (mit Quelle) ist zu zeichnen.
- Für Spannungen $U_q + \Delta U_q$ sind Strom und Spannungen allgemein zu berechnen.
- Für die Werte $U_{q1} = 101 \text{ V}$ und $U_{q2} = 110 \text{ V}$ sind Strom und Spannungen mit Hilfe der Linearisierung zahlenwertmäßig zu berechnen.
- Die Werte aus e) sind exakt mit Hilfe eines numerisch iterativen Verfahrens zu bestimmen.

Aufgabe 5.2.7 (Lineare Ersatzschaltung)

Die Spannung am Widerstand $R_2 = 190 \Omega$ soll mit Hilfe einer Zener-Diode stabilisiert werden. Gespeist wird die Parallelschaltung von Zener-Diode und Widerstand R_2 durch eine Spannungsquelle mit $R_1 = 90.5 \Omega$ Innenwiderstand. Die Daten der Zener-Diode sind durch eine lineare Ersatzschaltung gegeben:

$$U_Z = 5 \text{ V} \qquad r_Z = 10 \Omega \qquad P_{\max} = 500 \text{ mW}$$

- Zeichnen Sie das ESB.
- Berechnen Sie allgemein: $U_D = f(U_q)$, $I_D = f(U_q)$, $P_D = f(U_q)$
- Bestimmen Sie die Werte unter b) für $U_q = 20 \text{ V}$,
- Bestimmen Sie die Werte unter b) für $U_q = 10 \text{ V}$.
- Bestimmen Sie den zulässigen Bereich von U_q .

Aufgabe 5.2.8

Ein nichtlineares Bauelement, mit der Kennlinie $I = 10 \text{ A} (U_3/100 \text{ V})^2$ wird in Reihe mit einem Widerstand $R_2 = 5 \Omega$ an eine Spannungsquelle ($U_q = 100 \text{ V}$, $R_1 = 15 \Omega$) angeschlossen.

- Das ESB ist zu zeichnen.
- Die nichtlineare Kennlinie ist darzustellen ($1 \text{ cm} \triangleq 10 \text{ V}$, $1 \text{ cm} \triangleq 1 \text{ A}$).
- Die Kennlinie des Widerstandes R_2 ist in das gleiche Diagramm zu zeichnen.
- Die Reihenschaltung von R_2 und nichtlinearem Element ist grafisch auszuführen.
- Stellen Sie die Kennlinie der Spannungsquelle (U_q , R_1) dar.
- Bestimmen Sie den Arbeitspunkt (U_3 , I_3) grafisch.
- Berechnen Sie $U_3 = f(U_q)$ analytisch.
- Bestimmen Sie U_3 für $U_{q1} = 100 \text{ V}$, $U_{q2} = 101 \text{ V}$ und $U_{q3} = 110 \text{ V}$.
- Geben Sie die linearisierte Ersatzschaltung für den Arbeitspunkt an.
- Berechnen Sie mit den Daten unter i) die Spannungen U_3 für $U_{q1} = 100 \text{ V}$, $U_{q2} = 101 \text{ V}$ und $U_{q3} = 110 \text{ V}$.

Aufgabe 5.3.1

Ein NTC-Widerstand mit den Daten $R_{20} = 1.5 \Omega$, $b = 3500 \text{ K}$ und der Temperaturabhängigkeit

$$R(T) = R_{20} \cdot \exp \left[b \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{20}} \right) \right] \text{ soll untersucht werden.}$$

- Bestimmen den Temperaturbeiwert α für $T = T_{20} = (273 + 20) \text{ K}$.
- Bei welchen Temperaturen ist eine einprozentige Abweichung von der Linearität festzustellen (nur iterative Methode möglich).

Aufgabe 5.3.2

Der NTC aus Aufgabe 5.3.1 soll zur Temperaturkompensation eingesetzt werden.

- Welcher Kupferwiderstand R_{Cu} läßt sich damit kompensieren.
- Welcher Konstantanwiderstand R_{Ko} läßt sich damit kompensieren.

Aufgabe 5.3.3

Eine 100 W/220 V-Glühlampe mit einer Wolframwendel hat eine Betriebstemperatur von 2000°C . Wie groß ist der Einschaltstrom bei 20°C .

Aufgabe 5.3.4

Ein Thermoelement aus Kupfer und Platin soll eine Temperatur von 800°C messen. Wie groß ist die zu erwartende Spannung.

Aufgabe 5.3.5

Ein theoretisches Peltier-Element aus Cu-Konstantan-Cu mit einer Länge von $l_{Cu} = 1\text{ cm}$, $l_{Ko} = 10\text{ cm}$, $l_{Cu} = 1\text{ cm}$ und einer Fläche von $A = 1\text{ cm}^2$ wird von einem Strom von $I = 10\text{ A}$ bei $T = 293\text{ K}$ durchflossen.

- Welche Verlustleistungen treten in den einzelnen Abschnitten auf.
- Welche Leistungen treten in den Trennflächen auf.
- Wie groß ist die Gesamtspannung.

Aufgabe 5.4.1

Wieviel Masse Silber wird aus einer Silbernitratlösung (AgNO_3) bei einem Strom von 10 A in 4 h ausgeschieden. Das Atomgewicht $A_T = 108.9$ und die Ladungszahl $z = 1$ von Silber ist gegeben.

Aufgabe 5.4.2

Welche Zeit t braucht man, um eine Metallplatte der Fläche $A = 100\text{ cm}^2$ bei einem Strom von 5 A mit $d = 100\text{ }\mu\text{m}$ Kupfer ($A_T = 63.5$, $z = 2$, Dichte $\rho = 8900\text{ kg/m}^3$) mit Hilfe der Elektrolyse aus einer Kupfersulfat-Lösung (CuSO_4) zu überziehen.

Aufgabe 5.4.3

Welche Spannung stellt sich an den Elektroden im Elektrolyten ein, bei folgenden Material-Kombinationen:

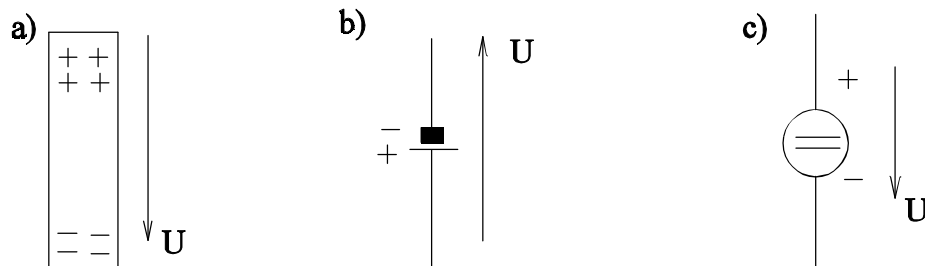
- Kohle - Zink
- Blei - Kupfer
- Alu - Kupfer

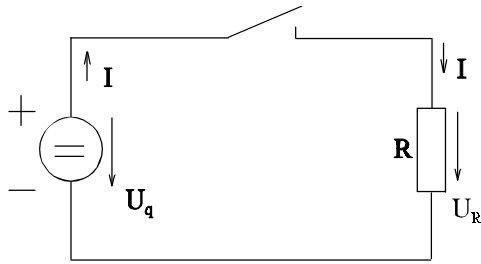
Ergebnisse**Aufgabe 1.5.1**

- $l = 0.28\text{ m}$
- $P = 4.4\text{ kW}$
- $P = 20\text{ W}$
- $I = 20\text{ A}$
- $P = 4\text{ kW}$

Aufgabe 2.1.1

- Die Ursache des elektrischen Stromes ist die Bewegung von Ladungsträgern.
- Die Ursache der elektrischen Spannung ist eine Ladungstrennung, die eine Raumladung und damit Elektronenmangel und Elektronenüberschuß bewirkt.

Aufgabe 2.1.2

Aufgabe 2.1.3**Aufgabe 2.1.4**

Wärmewirkung, magnetische Wirkung, Kraftwirkung, Induktionswirkung, chemische Wirkung, elektrostatische Wirkung, Piezo-Effekt.

Aufgabe 2.1.5

Ladung	$[Q] = As = C$
Strom	$[I] = A$
Spannung	$[U] = V$
Stromdichte	$[J] = A/m^2$

Aufgabe 2.1.6

$$J = \frac{I}{A}$$

Aufgabe 2.1.7

$$I = \frac{Q}{t} \qquad i = \frac{dQ}{dt}$$

Aufgabe 2.1.8

a) $Q = 4.896 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ b) $I = 139.9 \text{ } \mu\text{A}$ c) $J = 7.92 \text{ mA/mm}^2$

Aufgabe 2.1.9

$$v = 8224 \text{ m/s}$$

Aufgabe 2.1.10

$$v = 93.8 \text{ m/s}$$

Aufgabe 2.1.11

a) $I = 20 \text{ mA}$ b) $J = 2.546 \frac{A}{mm^2}$

c) $v = 0.159 \frac{mm}{s}$ d) $m = 2.5 \cdot 10^{17}$

Aufgabe 2.2.1

$$U = R \cdot I \qquad I = \frac{U}{R} \qquad R = \frac{U}{I}$$

Aufgabe 2.2.2

$$G = \frac{1}{R}$$

Aufgabe 2.2.3

$$U = \frac{I}{G} \qquad I = U \cdot G \qquad G = \frac{I}{U}$$

Aufgabe 2.2.4

a) $I = 5 \text{ A}$ b) $R = 5 \text{ } \Omega$ c) $U = 60 \text{ V}$

d) $I = 40 \text{ A}$ e) $G = 1.5 \text{ S}$ f) $U = 20 \text{ V}$

g) $I = 4 \text{ mA}$ h) $R = 5 \text{ k}\Omega$ i) $U = 30 \text{ V}$

Aufgabe 2.2.5

a) $R = \frac{l}{\kappa \cdot A}$

b) $R = \rho \frac{l}{A}$

Aufgabe 2.2.6

a) $R = R_{20}[1 + \alpha(\vartheta - 20^\circ\text{C})]$

b) $R = R_{20}[1 + \alpha(\vartheta - 20^\circ\text{C}) + \beta(\vartheta - 20^\circ\text{C})^2]$

c) R_{20} ist der Widerstand bei $\vartheta = 20^\circ\text{C}$

Aufgabe 2.2.7

$[R] = \Omega = \text{V/A}$

$[G] = S = \text{A/V}$

$[\rho] = \Omega\text{mm}^2/\text{m}$ oder $[\rho] = \Omega\text{m}$

$[\kappa] = \text{Sm}/\text{mm}^2$ auch $[\kappa] = \text{S/m}$

$[\alpha] = ^\circ\text{C}^{-1} = \text{K}^{-1}$

Aufgabe 2.2.8

4 %

Aufgabe 2.2.9

a) positiv

b) negativ

Aufgabe 2.2.10

$I = 6.79 \text{ A}$

Aufgabe 2.2.11

$I_{110} = 23.3 \text{ mA}$

Aufgabe 2.2.12

$I = 0.180 \text{ A}$

Aufgabe 2.2.13

$\vartheta = 91.7^\circ\text{C}$

Aufgabe 2.3.1

a) $I = 13 \text{ A}$

b) $I = -7 \text{ A}$

c) $I = 6 \text{ A}$

d) $I = -600 \text{ A}$

Aufgabe 2.3.2

a) $U = 20 \text{ V}$

b) $U = -30 \text{ V}$

c) $U_q = 70 \text{ V}$

d) $U = 45 \text{ V}$

Aufgabe 2.3.3

a) $I_1 + I_2 - I_3 = 0$

$I_3 + I_4 - I_5 = 0$

b) $-I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0$

$I_3 - I_2 - I_5 + I_6 = 0$

Aufgabe 2.3.4

a) $U_1 + U_2 - U_4 - U_{q1} = 0$

$U_5 + U_2 + U_{q3} - U_{q2} = 0$

b) $U_1 + U_{q2} - U_2 - U_{q1} = 0$

$U_{q3} + U_{q2} - U_2 + U_5 - U_4 - U_{q4} - U_3 = 0$

Aufgabe 2.4.1

a) $R = 35.8 \Omega$

b) $R = 81 \Omega$

c) $R = 12.5 \Omega$

d) $R = 24 \Omega$

e) $R = 5.263 \Omega$

f) $R = 25 \Omega$

Aufgabe 2.4.2

a) $I_1 = 5 \text{ A}$ $U_1 = 80 \text{ V}$

$U_2 = U_3 = 120 \text{ V}$

$I_2 = 3 \text{ A}$

$I_3 = 2 \text{ A}$

b) $I_1 = 3 \text{ A}$ $U_1 = 24 \text{ V}$

$U_2 = U_3 = 36 \text{ V}$

$I_2 = 1.8 \text{ A}$

$I_3 = 1.2 \text{ A}$

c) $I_1 = 0.5 \text{ A}$ $U_1 = 15 \text{ V}$

$U_2 = 60 \text{ V}$

$I_2 = 0.2 \text{ A}$

$I_3 = 0.3 \text{ A}$ $U_3 = 37.5 \text{ V}$

$U_4 = 22.5 \text{ V}$

$I_4 = 0.075 \text{ A}$

$I_5 = 0.225 \text{ A}$ $U_5 = 22.5 \text{ V}$

d) $I_1 = 2.5 \text{ A}$ $U_1 = 50 \text{ V}$

$I_2 = 2.5 \text{ A}$

$U_2 = 100 \text{ V}$

$I_3 = 4 \text{ A}$ $U_3 = 50 \text{ V}$

$I_4 = 1.5 \text{ A}$

$U_4 = 114 \text{ V}$

$I_5 = 0.6 \text{ A}$ $U_5 = 36 \text{ V}$

$I_6 = 0.9 \text{ A}$

$U_6 = 27 \text{ V}$

$I_7 = 0.9 \text{ A}$ $U_7 = 9 \text{ V}$

Aufgabe 2.5.1

a) $U_1 = 14 \text{ V}$

b) $U_1 = 18.3 \text{ V}$

c) $U_1 = 20 \text{ V}$

$U_2 = 10 \text{ V}$

Aufgabe 2.5.2

$U_1 = 10 \text{ V}$

$U_2 = 20 \text{ V}$

$U_3 = 30 \text{ V}$

$U_4 = 40 \text{ V}$

$U_5 = 20 \text{ V}$

Aufgabe 2.5.3

a) $I_2 = 24 \text{ A}$

b) $I_2 = 4 \text{ A}$

c) $I_2 = 10 \text{ A}$

Aufgabe 2.5.4

$I_1 = 12 \text{ A}$

$I_2 = 8 \text{ A}$

$I_3 = 4 \text{ A}$

$I_4 = 10 \text{ A}$

$I_5 = 6 \text{ A}$

Aufgabe 2.5.5

$R_b \gg R$

Aufgabe 2.5.6

$\Delta U = -0.144 \text{ V}$

Aufgabe 2.5.7

$R_b = 734 \text{ k}\Omega$

Aufgabe 2.6.1

a) I

b) I^2

Aufgabe 2.6.2

a) arithmetischer Mittelwert

b) quadratischer Mittelwert

Aufgabe 2.6.3

a) negativ oder positiv

b) nur positiv

Aufgabe 2.6.4

Temperatur, $\alpha \sim I, I \sim \frac{U}{R}, R = f(T)$

Aufgabe 2.6.5

a) niedrig, damit kein Spannungsabfall

b) hoch, damit keine Stromaufnahme

Aufgabe 2.6.6

a) parallel

b) in Reihe

Aufgabe 2.6.7

- Das Produkt der gegenüberliegenden Widerstände muß gleich sein und
- die Brückenspannung muß auf Null abgeglichen werden.

Aufgabe 2.6.8

a) großen Einfluß

b) geringen Einfluß

Aufgabe 2.7.1

a) $I_q = 4 \text{ A}$

$G_i = 50 \text{ mS}$

b) $I_q = 2.4 \text{ A}$

$G_i = 20 \text{ mS}$

c) $I_q = 7.5 \text{ A}$

$G_i = 0.25 \text{ S}$

d) $I_q = 120 \text{ A}$

$G_i = 10 \text{ S}$

Aufgabe 2.7.2

a) $U_q = 20 \text{ V}$

$R_q = 5 \Omega$

b) $U_q = 1.5 \text{ V}$

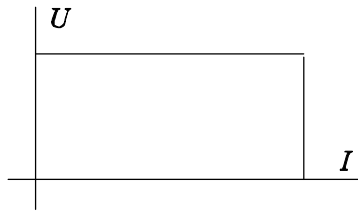
$R_q = 50 \text{ m}\Omega$

c) $U_q = 60 \text{ V}$

$R_q = 1 \text{ k}\Omega$

d) $U_q = 40 \text{ V}$

$R_q = 0.1 \Omega$

Aufgabe 2.7.3**Aufgabe 2.7.4**c) und d) $U_R = 60 \text{ V}$, $U_{Ri} = 20 \text{ V}$, $I = 1 \text{ A}$ e) $I_q = 4$ $G_i = 50 \text{ mS}$ **Netzwerk 3A**

$U_1 = 65 \text{ V}$	$U_2 = 30 \text{ V}$	$U_3 = -40 \text{ V}$	$U_4 = 160 \text{ V}$	$U_5 = 120 \text{ V}$
$I_1 = 5.2 \text{ A}$	$I_2 = 2 \text{ A}$ $I_3 = -2 \text{ A}$	$I_4 = 3.2 \text{ A}$	$I_5 = 4 \text{ A}$	

Netzwerk 3B

$U_1 = 2.64 \text{ V}$	$U_2 = 0.64 \text{ V}$	$U_3 = 9.36 \text{ V}$
$I_1 = 2.2 \text{ A}$	$I_2 = 0.8 \text{ A}$	$I_3 = 3 \text{ A}$

Netzwerk 3C

$U_1 = 10 \text{ V}$	$U_2 = 30 \text{ V}$	$U_3 = 18 \text{ V}$	$U_4 = 12 \text{ V}$	$U_5 = 12 \text{ V}$
$I_1 = 2 \text{ A}$	$I_2 = 0.5 \text{ A}$	$I_3 = 1.5 \text{ A}$	$I_4 = 0.3 \text{ A}$	$I_5 = 1.2 \text{ A}$

Netzwerk 3D

$U_1 = 33 \text{ V}$	$U_2 = 60 \text{ V}$	$U_3 = 45 \text{ V}$	$U_4 = -15 \text{ V}$	$U_5 = 27 \text{ V}$	$U_6 = 42 \text{ V}$
$I_1 = 3 \text{ A}$	$I_2 = 0.75 \text{ A}$	$I_3 = 2.25 \text{ A}$	$I_4 = -0.15 \text{ A}$	$I_5 = 0.9 \text{ A}$	$I_6 = 2.1 \text{ A}$

Netzwerk 3E

$U_1 = 60 \text{ V}$	$U_2 = 5 \text{ V}$	$U_3 = 105 \text{ V}$
$I_1 = 3 \text{ A}$	$I_2 = 0.5 \text{ A}$	$I_3 = 3.5 \text{ A}$

Netzwerk 3F

$U_1 = 10 \text{ V}$	$U_2 = 15 \text{ V}$	$U_3 = 10 \text{ V}$	$U_4 = 45 \text{ V}$	$U_5 = 80 \text{ V}$	$U_6 = 45 \text{ V}$
$I_1 = 5 \text{ A}$	$I_2 = 3 \text{ A}$	$I_3 = 1 \text{ A}$	$I_4 = 1 \text{ A}$	$I_5 = 4 \text{ A}$	$I_6 = 4 \text{ A}$

Netzwerk 3G

$U_1 = 30 \text{ V}$	$U_2 = 6 \text{ V}$	$U_3 = 160 \text{ V}$	$U_4 = 100 \text{ V}$	$U_5 = 60 \text{ V}$
$I_1 = 6 \text{ A}$	$I_2 = 3 \text{ A}$	$I_3 = 4 \text{ A}$	$I_4 = 5 \text{ A}$	$I_5 = 6 \text{ A}$

Netzwerk 3H

$U_1 = -18 \text{ V}$	$U_2 = 118 \text{ V}$
$I_1 = -0.1 \text{ A}$	$I_2 = 5.9 \text{ A}$

Netzwerk 3J

$U_1 = 10 \text{ V}$	$U_2 = 2 \text{ V}$	$U_3 = 5 \text{ V}$	$U_4 = 8 \text{ V}$	$U_5 = 5 \text{ V}$	$U_6 = -3 \text{ V}$
$I_1 = 2 \text{ A}$	$I_2 = 6 \text{ A}$	$I_3 = 8 \text{ A}$	$I_4 = 4 \text{ A}$	$I_5 = 10 \text{ A}$	$I_6 = -2 \text{ A}$

Netzwerk 3K

$U_{12} = 50 \text{ V}$	$U_{20} = 25 \text{ V}$	$U_{03} = 25 \text{ V}$	$U_{13} = 100 \text{ V}$
$I_{12} = 5 \text{ A}$	$I_{20} = 10 \text{ A}$	$I_{03} = 2 \text{ A}$	$I_{13} = 3 \text{ A}$

Netzwerk 3L

$U_{12} = 25 \text{ V}$	$U_{13} = 141 \text{ V}$	$U_{20} = 160 \text{ V}$	$U_{30} = 44 \text{ V}$	
$I_{12} = 5 \text{ A}$	$I_{13} = 5.64 \text{ A}$	$I_{20} = 8 \text{ A}$	$I_{30} = 2.64 \text{ A}$	$I_{10} = 10.64 \text{ A}$

Netzwerk 3M

$U_1 = 100 \text{ V}$	$U_2 = 40 \text{ V}$	$U_3 = 20 \text{ V}$	$U_4 = 55 \text{ V}$	$U_5 = 75 \text{ V}$	$U_6 = 20 \text{ V}$
$I_1 = 5 \text{ A}$	$I_2 = 4 \text{ A}$	$I_3 = 1 \text{ A}$	$I_4 = 1 \text{ A}$	$I_5 = 3 \text{ A}$	$I_6 = 2 \text{ A}$

Netzwerk 3N

$U_1 = 12 \text{ V}$	$U_2 = 15 \text{ V}$	$U_3 = 78 \text{ V}$	$U_4 = 30 \text{ V}$	$U_5 = 50 \text{ V}$	$U_6 = -20 \text{ V}$
$I_1 = 12 \text{ A}$	$I_2 = 1 \text{ A}$	$I_3 = 13 \text{ A}$	$I_4 = 3 \text{ A}$	$I_5 = 10 \text{ A}$	$I_6 = -2 \text{ A}$

Netzwerk 3O

$U_1 = 56 \text{ V}$	$U_2 = 90 \text{ V}$	$U_3 = 40 \text{ V}$	$U_4 = 45 \text{ V}$	$U_5 = 50 \text{ V}$
$U_6 = 130 \text{ V}$	$U_7 = 46 \text{ V}$	$U_8 = 35 \text{ V}$	$U_9 = 5 \text{ V}$	$U_{10} = 30 \text{ V}$
$I_1 = 14 \text{ A}$	$I_2 = 9 \text{ A}$	$I_3 = 5 \text{ A}$	$I_4 = 15 \text{ A}$	$I_5 = 10 \text{ A}$
$I_6 = 13 \text{ A}$	$I_7 = 23 \text{ A}$	$I_8 = 7 \text{ A}$	$I_9 = 8 \text{ A}$	$I_{10} = 1.2 \text{ A}$

Aufgabe 3.1.1

- Ein Knoten ist die Verbindung von mindestens zwei, meistens aber mehr als zwei Enden von Zweigen.
- Ein Zweig ist die Verbindung zwischen zwei Knoten. Der Zweig kann, muß aber nicht, auch Quellen (Strom, Spannungen) enthalten.
- Die Masche ist ein geschlossener Umlauf in einem Netzwerk.

Aufgabe 3.1.2

- z - Anzahl der Zweige
- k - Anzahl der Knoten
- m - Anzahl der Maschen

Aufgabe 3.1.3

- $U^N = 100$
- $I^N = 2$
- $R^N = 50$

Aufgabe 3.1.4

- $U^N = 20$
- $I^N = 50$
- $R^N = 0.4$

Aufgabe 3.1.5

- $U^N = I^N \cdot R^N$
- $U^N = I^N \cdot R^N / 4$
- $U^N = I^N \cdot R^N / 1.5$

Aufgabe 3.1.6

- $I = 4 \text{ A}$
- $I = 9 \text{ A}$

Aufgabe 3.1.7

3A	k = 3	z = 5
3B	k = 2	z = 3
3C	k = 3	z = 5
3D	k = 4	z = 6
3E	k = 2	z = 3
3F	k = 4	z = 6
3G	k = 3	z = 5
3H	k = 2	z = 2

Aufgabe 3.2.1

- $U_i = R_i \cdot I_i$
- z Ströme
- z
- k - 1
- m = z - (k - 1)

Aufgabe 3.2.2

- inverse Matrix
- Gauß'scher Algorithmus
- Cramer Regel
- Eingabe in Rechner

Aufgabe 4.5.1

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|-----------------------|
| a) $I = 9.091 \text{ A}$ | b) $P = 484 \text{ W}$ | |
| c) $P = 4 \text{ kW}$ | d) $I = 5.774 \text{ A}$ | $U = 346.4 \text{ V}$ |
| e) $I = 2 \text{ A}$ | f) $P = 500 \text{ W}$ | |
| g) $P = 9 \text{ kW}$ | h) $U = 164.4 \text{ V}$ | $I = 1.826 \text{ A}$ |

Aufgabe 4.5.2

- | | | | | |
|----------------------|----------------------|--------------------|----------------------|------------------|
| a) $I = 2 \text{ A}$ | $U_R = 10 \text{ V}$ | $P = 20 \text{ W}$ | $P_v = 4 \text{ W}$ | $\eta = 83.3 \%$ |
| b) $R > 9 \Omega$ | | | | |
| c) $R = 1 \Omega$ | $I = 6 \text{ A}$ | $P = 36 \text{ W}$ | $P_v = 36 \text{ W}$ | $\eta = 0.5$ |

Aufgabe 4.5.3

- | | | |
|-------------------------------|------------------------------|------------------------|
| b) $U_3 = 11.65 \text{ V}$ | $U_1 = U_2 = 0.35 \text{ V}$ | |
| $I_3 = 0.466 \text{ A}$ | $I_2 = 0.117 \text{ A}$ | $I_1 = 0.35 \text{ A}$ |
| c) $P_{q1} = 4.2 \text{ W}$ | $P_{q2} = 1.40 \text{ W}$ | $P_3 = 5.43 \text{ W}$ |
| d) $P_{v1} = 0.123 \text{ W}$ | $P_{v2} = 0.041 \text{ W}$ | |
| e) $\eta_1 = 0.971$ | $\eta_2 = 0.971$ | $\eta = 0.971$ |
| f) $R_3 = 0.75 \Omega$ | $P_{3\max} = 48 \text{ W}$ | |

Aufgabe 4.5.4

- | | | |
|------------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| a) $I_q^* = 19.25 \text{ A}$ | $R_q^* = 6.667 \Omega$ | $U_q^* = 128.3 \text{ V}$ |
| $R_3 = 6.667 \Omega$ | $P_{\max} = 617 \text{ W}$ | |
| b) $R_q^* = 10.08 \Omega$ | $U_q^* = 151.2 \text{ V}$ | $P_{\max} = 567 \text{ W}$ |
| c) $I_q^* = 4.639 \text{ A}$ | $R_q^* = 15.11 \Omega$ | $U_q^* = 70.10 \text{ V}$ |
| | | $P_{\max} = 81.3 \text{ W}$ |

Aufgabe 4.6.1

- | | |
|-----------------------------|-------------------------------|
| a) $l_w = 19.36 \text{ cm}$ | b) $l_w^* = 19.30 \text{ cm}$ |
|-----------------------------|-------------------------------|

Aufgabe 4.6.2

$$t = 69.8 \text{ min}$$

Aufgabe 4.6.3

$$t = 1025 \text{ s} = 17.1 \text{ min}$$

Aufgabe 4.6.4

$$t = 2507 \text{ s} = 41.8 \text{ min}$$

Aufgabe 4.6.5

$\vartheta_1 = 32.9 \text{ }^\circ\text{C}$	$\vartheta_2 = 45.8 \text{ }^\circ\text{C}$	$\vartheta_3 = 58.7 \text{ }^\circ\text{C}$
---	---	---

Aufgabe 4.6.6

$\vartheta_i = 20 \text{ }^\circ\text{C} + 0.4060 \text{ }^\circ\text{C} \cdot t_i / \text{s}$	i = 1..3
$\vartheta_1 = 44.4 \text{ }^\circ\text{C}$	$m_1 = 0.5 \text{ kg}$
$\vartheta_2 = 68.7 \text{ }^\circ\text{C}$	$m_2 = 0.5 \text{ kg}$
$\vartheta_3 = 93.1 \text{ }^\circ\text{C}$	$m_3 = 0.5 \text{ kg}$
$t_v = 197.0 \text{ s}$	
$m_i = 0.5 \text{ kg} - 0.3768 \cdot 10^{-3} \text{ kg} (t_i - t_v) / \text{s}$	i = 4..7
$m_4 = 0.484 \text{ kg}$	$\vartheta_4 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$
$m_5 = 0.461 \text{ kg}$	$\vartheta_5 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$
$m_6 = 0.348 \text{ kg}$	$\vartheta_6 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$
$m_7 = 0.122 \text{ kg}$	$\vartheta_7 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$

Aufgabe 4.7.1

a) $\Delta W_{\text{kin}} = 300 \cdot 10^3 \text{ Ws}$

b) $P_{\text{mech}} = 15 \text{ kW}$

c) $P_{\text{el}} = 18.75 \text{ kW}$

d) $I = 104 \text{ A}$

e)
$$I = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2 \cdot U \cdot t \cdot \eta}$$

Aufgabe 4.7.2

$t = 0.441 \text{ s}$

Aufgabe 4.7.3

a) $P_{\text{nech}} = 200 \text{ kW}$

b) $P_{\text{el}} = 222 \text{ kW}$

c) $I = 555 \text{ A}$

d)
$$I = \frac{m \cdot g \cdot v}{\eta \cdot U}$$

Aufgabe 4.7.4

$v = 1.6 \text{ m/s}$

Aufgabe 4.8.1

$A > 3.39 \text{ mm}^2$

Aufgabe 4.8.2

$U_N > 168$

Aufgabe 5.1.1

$$m_{\text{Leiter}} = 6 \cdot 10^{18} \frac{\text{Elektronen}}{\text{s}}$$

$$m_{\text{HL}} = 6 \cdot 10^{12} \frac{\text{Elektronen}}{\text{s}}$$

$$m_{\text{isol}} = 60 \cdot 10^6 \frac{\text{Elektronen}}{\text{s}}$$

$$m_{\text{iso2}} = 0.6 \frac{\text{Elektronen}}{\text{s}}$$

Aufgabe 5.2.1

f) $U = 0.7808 \text{ V}$

$I = 60.96 \text{ mA}$

Aufgabe 5.2.2

$U = 0.6466 \text{ V}$

$I = 41.81 \text{ mA}$

Aufgabe 5.2.3

$U = 0.7535 \text{ V}$

$I = 56.77 \text{ mA}$

Aufgabe 5.2.4

$U = 43.374 \text{ V}$

$I = 0.56623 \text{ A}$

Aufgabe 5.2.5

$U = 40.687 \text{ V}$

$I = 0.53883 \text{ A}$

Aufgabe 5.2.6

e) $U_1 = 43.534 \text{ V}$

$U_2 = 44.981 \text{ V}$

f) $U_1 = 43.534 \text{ V}$

$U_2 = 44.911 \text{ V}$

Aufgabe 5.2.7

b)
$$U_D = \frac{U_q}{10.53} + 4.299 \text{ V} \quad I_D = \frac{U_q}{105.3 \Omega} - 0.0701 \text{ A}$$

$$P_D = \frac{U_q^2}{1109 \Omega} + U_q \cdot 34.17 \cdot 10^{-3} \text{ A} - 0.3014 \text{ W}$$

c) $U_D = 6.19 \text{ V}$

$I_D = 0.120 \text{ A}$

$P_D = 0.743 \text{ W}$

d) $U_D = 5.25 \text{ V}$

$I_D = 0.0249 \text{ A}$

$P_D = 0.130 \text{ W}$

e) $U_q^{\min} = 7.38 \text{ V}$ wenn $U_D = U_Z$ oder $I_D = 0$ $U_q^{\max} = 16.4 \text{ V}$ wenn $P_D = P_{\max}$

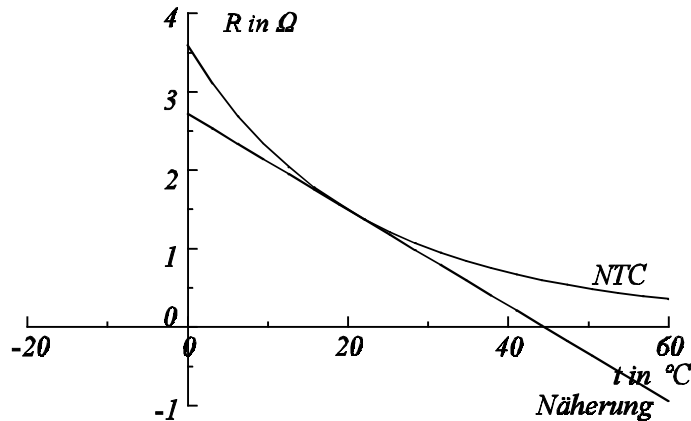
Aufgabe 5.2.8

g) $U_3 = 100 \text{ V} \left[-\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2} \frac{U_q}{100 \text{ V}}} \right] \quad I = 2.5 \text{ A}$

h) $U_3(U_q = 100 \text{ V}) = 50 \text{ V} \quad U_3(U_q = 101 \text{ V}) = 50.3326 \text{ V} \quad U_3(U_q = 110 \text{ V}) = 53.2628 \text{ V}$

i) $r = 10 \Omega \quad U_{q3} = 25 \text{ V} \quad U_3 = (U_q + 50 \text{ V})/3$

j) $U_3(U_q = 100 \text{ V}) = 50 \text{ V} \quad U_3(U_q = 101 \text{ V}) = 50.3333 \text{ V} \quad U_3(U_q = 110 \text{ V}) = 53.333 \text{ V}$
 $\Delta U_3 = U_q/3$

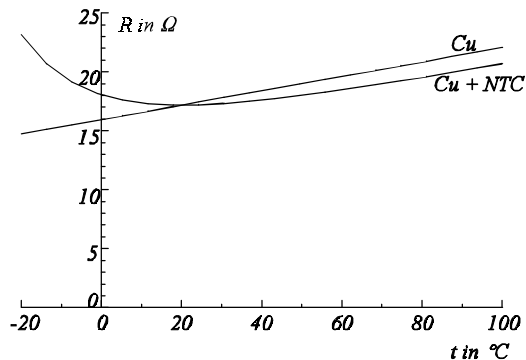
Aufgabe 5.3.1

a) $\alpha = -0.04077 \text{ K}^{-1}$

b) $16.88^\circ\text{C} \leq \vartheta \leq 23.30^\circ\text{C}$

Aufgabe 5.3.2

a) $R_{Cu} = 15.68 \Omega \quad b) \quad R_{Ko} = 6.116 \text{ k}\Omega \quad 10.11^\circ\text{C} \leq \vartheta \leq 32.02^\circ\text{C}$

**Aufgabe 5.3.3**

$I = 0.4545 \text{ A} \quad I_0 = 5.927 \text{ A}$

Aufgabe 5.3.4

$U_{TH} = 4.60 \text{ mV}$

Aufgabe 5.3.5

a) $R_{Cu} = 1.786 \mu\Omega \quad R_{Ko} = 0.4348 \text{ m}\Omega \quad P_{Cu} = 2 \cdot 0.179 \text{ mW} \quad P_{Ko} = 43.5 \text{ mW}$

c) $P_{T1} = 117 \text{ mW} \quad P_{T2} = -11.7 \text{ mW}$

d) $U = 4.39 \text{ mV}$

Aufgabe 5.4.1

$m = 162.7 \text{ g}$

Aufgabe 5.4.2

$t = 5391 \text{ s}$

Aufgabe 5.4.3

a) $1.5 \text{ V} \quad b) \quad 0.47 \text{ V} \quad c) \quad 200 \text{ V}$